Arbres en boîtes et hyperarbres décorés

Bérénice Oger

Institut Camille Jordan (Lyon)
Forum des jeunes Mathématicien-ne-s 2013

Mercredi 13 novembre 2013

Sommaire

Introduction

- Hyperarbres définis par C. Berge dans les années 1980
- Poset sur les hyperarbres utilisé par C. Jensen, J. McCammond et J. Meier dans les années 2000 pour l'étude d'un sous-groupe du groupe des automorphismes du groupe libre
- Action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres étudiée par F. Chapoton et B.O.

$$\Downarrow$$

Les formules obtenues font intervenir des hyperarbres décorés.

But :

Compter ces hyperarbres décorés

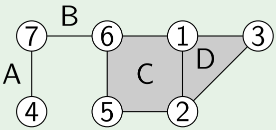
Hypergraphes et hyperarbres

Définition

Un hypergraphe *(sur un ensemble V) est un couple (V, E) où :*

- *V est un ensemble fini, (sommets)*
- *E est un sous-ensemble de taille au moins 2 de l'ensemble des parties de V, $\mathcal{P}(V)$. (arêtes)*

Exemple d'hypergraphe sur $[1;7]$



Marche sur un hypergraphe

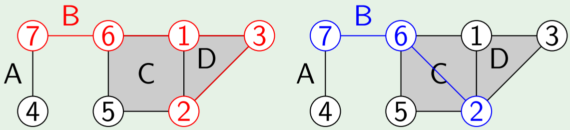
Définition

Soit $H = (V, E)$ un hypergraphe.
Une marche d'un sommet d vers un sommet f de H est une suite alternée de sommets et d'arêtes, commençant par d et terminant par f :

$$(d, \ldots, e_i, v_i, e_{i+1}, \ldots, f)$$

où pour tout i, $v_i \in V$, $e_i \in E$ et $\{v_i, v_{i+1}\} \subseteq e_i$. La longueur de la marche est le nombre de sommets et d'arêtes de la marche.

Exemples de marches



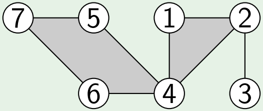
Hyperarbres

Définition

Un hyperarbre *est un hypergraphe non trivial H tel que, pour toute paire de sommets distincts v et w de H,*

- *il existe une marche de v à w dans H avec des arêtes disjointes e_i (H est connexe),*
- *cette marche est unique (H n'a pas de cycles).*

Exemple d'un hyperarbre

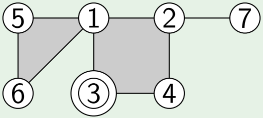


Hyperarbres enracinés

Définition

Un hyperarbre enraciné est un hyperarbre avec un sommet distingué (racine).

Exemple d'un hyperarbre enraciné



Qu'est-ce qu'une espèce ?

Définition

Une espèce F *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. A un ensemble fini* I*, l'espèce* F *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de* I*.*

Qu'est-ce qu'une espèce ?

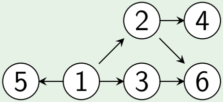
Définition

Une espèce F *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. A un ensemble fini I, l'espèce* F *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de I.*

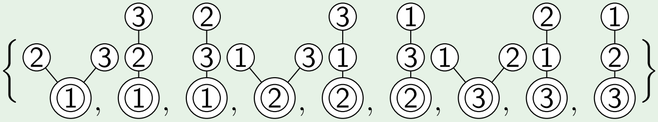
Contre-exemples

Les ensembles suivants ne peuvent **pas** être obtenus comme l'image d'un ensemble par une espèce :

- $\{(1,\mathbf{3},2),(2,1,\mathbf{3}),(2,\mathbf{3},1)(3,1,\mathbf{2})\}$(ensemble des permutations de $\{1,2,3\}$ avec exactement une descente)
- (graphe de divisibilité de $\{1,2,3,4,5,6\}$)

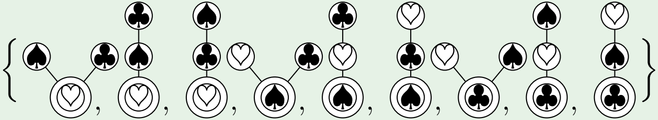


Exemples

- $\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$ (espèce $\mathbb{L}$ des listes sur $\{1,2,3\}$)
- $\{\{1,2,3\}\}$ (espèce des ensembles $\mathbb{E}$)
- $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ (espèce des ensembles pointés $\mathbb{P}$)
-  (espèce des arbres enracinés $\mathbb{A}$)

Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{1,2,3\}$.

Exemples

- $\{(\heartsuit,\spadesuit,\clubsuit),(\heartsuit,\clubsuit,\spadesuit),(\spadesuit,\heartsuit,\clubsuit),(\spadesuit,\clubsuit,\heartsuit),(\clubsuit,\heartsuit,\spadesuit),(\clubsuit,\spadesuit,\heartsuit)\}$ (espèce $\mathbb{L}$ des listes sur $\{\clubsuit,\heartsuit,\spadesuit\}$)
- $\{\{\heartsuit,\spadesuit,\clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles $\mathbb{E}$)
- $\{\{\heartsuit\},\{\spadesuit\},\{\clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles pointés $\mathbb{P}$)
-  (espèce des arbres enracinés $\mathbb{A}$)

Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{\clubsuit,\heartsuit,\spadesuit\}$.

Hyperarbres décorés

Définition

Soit $\mathcal{S}$ une espèce, un hyperarbre décoré (éventuellement enraciné) est obtenu à partir d'un hyperarbre H (éventuellement enraciné) en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e.

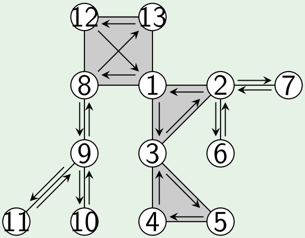
Hyperarbres décorés

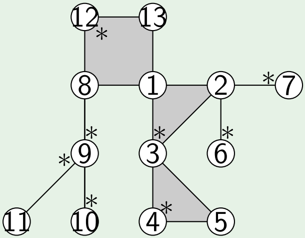
Définition

Soit $\mathcal{S}$ une espèce, un hyperarbre décoré (éventuellement enraciné) est obtenu à partir d'un hyperarbre H (éventuellement enraciné) en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e.

Deux décorations différentes du même hyperarbre H :

par l'espèce des cycles et par l'espèce des ensembles pointés.





Séries génératrices

On note $\mathcal{H}_{\mathbb{F}}(n)$ l'ensemble des hyperarbres sur n sommets décorés par l'espèce $\mathbb{F}$,
et $\mathcal{H}^p_{\mathbb{F}}(n)$ l'ensemble des hyperarbres sur n sommets enracinés décorés par l'espèce $\mathbb{F}$.
Les séries génératrices associées sont :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{F}}(t) := \sum_{n\geq 2} \#\mathcal{H}_{\mathbb{F}}(n)\frac{t^n}{n!} \text{ et } \mathcal{S}^p_{\mathbb{F}}(t) := \sum_{n\geq 2} \#\mathcal{H}^p_{\mathbb{F}}(n)\frac{t^n}{n!}.$$

Ces séries génératrices sont reliées par :

Proposition

Les séries génératrices des hyperarbres et hyperarbres enracinés vérifient :

$$\mathcal{S}^p_{\mathbb{F}}(t) = t \cdot \mathcal{S}'_{\mathbb{F}}(t).$$

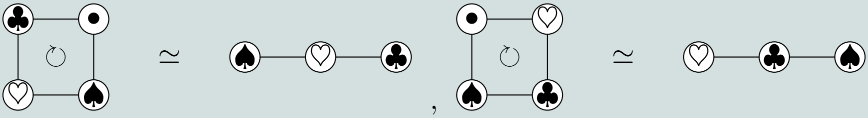
Dérivée d'une espèce

Proposition

Soit F une espèce. On peut définir sa dérivée comme suit :

$$F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\}).$$

Exemple : La dérivée de l'espèce des cycles sur $I = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$



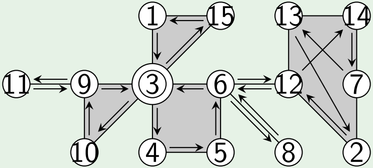
Définition alternative pour la décoration des hyperarbres enracinés

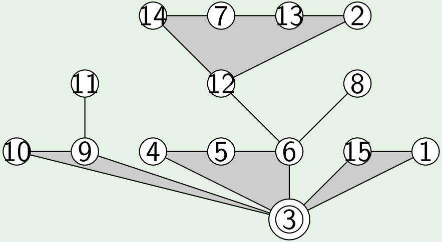
On appelle pétiole, le sommet par lequel l'arête est attachée à la racine.

Proposition

Si H est un hyperarbre enraciné, la décoration de H par une espèce S équivaut au choix pour chaque arête e d'un élément de l'ensemble $\mathcal{S}'\left(V_e^l\right)$, où l'ensemble V_e^l est l'ensemble des sommets de e distincts de la pétiole ou de la racine.

Décoration d'un hyperarbre enracinés par l'espèce des cycles





Qu'est-ce qu'un arbre en boîtes ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés étiquettes,

Qu'est-ce qu'un arbre en boîtes ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés étiquettes,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés sommets,

Qu'est-ce qu'un arbre en boîtes ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés étiquettes,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés sommets,
- R est un élément de V appelé racine,

Qu'est-ce qu'un arbre en boîtes ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés étiquettes,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés sommets,
- R est un élément de V appelé racine,
- E est une application de $V - \{R\}$ dans L appelé l'ensemble des arêtes.

Qu'est-ce qu'un arbre en boîtes ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés étiquettes,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés sommets,
- R est un élément de V appelé racine,
- E est une application de $V - \{R\}$ dans L appelé l'ensemble des arêtes.

On note $\tilde{E}$, l'application de $V - \{R\}$ dans V qui associe à un sommet v le sommet v' contenant l'étiquette $E(v)$. Le couple $\left(V, \tilde{E}\right)$ forme alors un graphe orienté dont les sommets sont étiquetés par des sous-ensembles de L.

Qu'est-ce qu'un arbre en boîtes ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

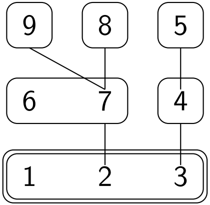
- L est un ensemble fini d'éléments appelés étiquettes,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés sommets,
- R est un élément de V appelé racine,
- E est une application de $V - \{R\}$ dans L appelé l'ensemble des arêtes.

On note $\tilde{E}$, l'application de $V - \{R\}$ dans V qui associe à un sommet v le sommet v' contenant l'étiquette $E(v)$. Le couple $\left(V, \tilde{E}\right)$ forme alors un graphe orienté dont les sommets sont étiquetés par des sous-ensembles de L.

Définition

Le quadruplet (L, V, R, E) est un arbre en boîte si et seulement si le graphe $\left(V, \tilde{E}\right)$ est un arbre, enraciné en R, dont les arêtes sont orientés vers la racine.
L'étiquette l est le parent d'un sommet v si $E(v) = l$.

Un arbre en boîte

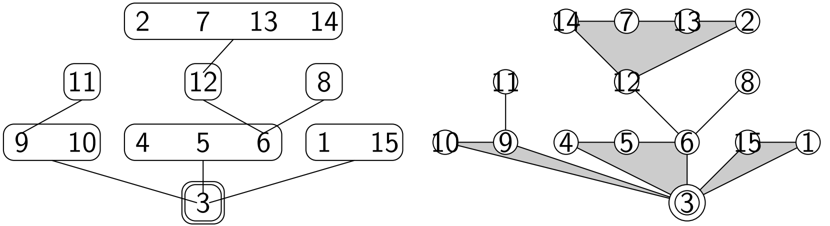


Lien entre hyperarbres enracinés décorés et arbres en boîtes

Proposition

Soit $\mathcal{S}$ une espèce, tout hyperarbre enraciné décoré par $\mathcal{S}$, sur k arêtes et n sommets, peut se décomposer en un triplet $(r, \mathbb{S}, BT)$ où :

- *r est la racine de l'hyperarbre,*
- *$\mathbb{S}$ est un ensemble de k ensembles décorés par $\mathcal{S}'$ sur $n-1$ sommets,*
- *et BT est un arbre en boîtes sur $k+1$ sommets avec une racine étiquetée par r et les autres sommets étiquetés par les ensembles de $\mathbb{S}$*



Comptons les arbres en boîtes

Proposition

Soit L un ensemble fini de cardinal n et V une partition de L en $k+1$ parts $p_0, p_1, \ldots, p_k$. Le nombre d'arbre en boîtes *qui a pour ensemble d'étiquettes L et pour ensemble de sommets V, est :*

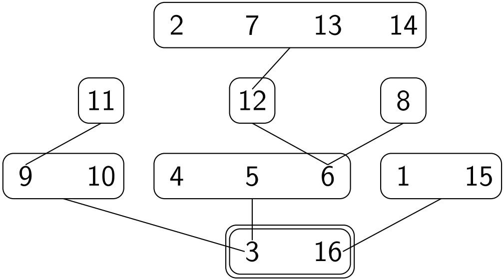
$$N_{L,V,p_0} = \#p_0 \times n^{k-1}.$$

Démonstration.

1. Par récurrence
2. Code de Prüfer

$\square$

Code de Prüfer

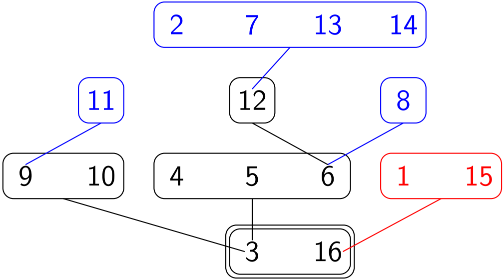


La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

Code de Prüfer

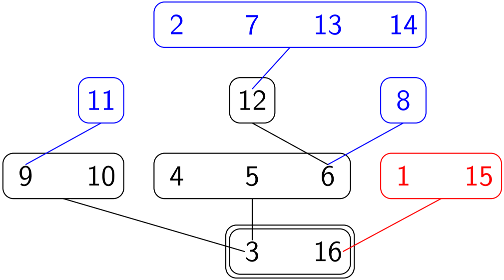


La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

Code de Prüfer



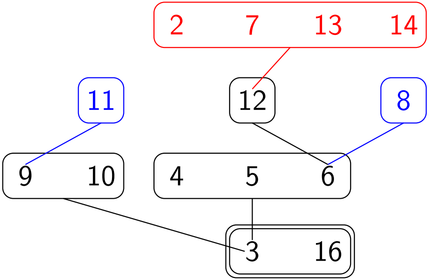
La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$\mathbf{16}$$

Code de Prüfer



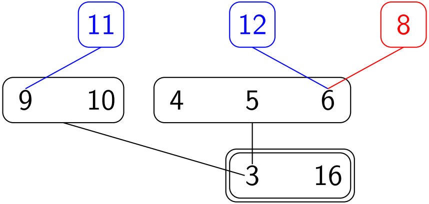
La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16, \mathbf{12}$$

Code de Prüfer



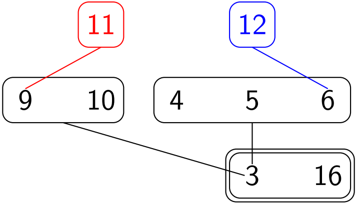
La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16,12,\mathbf{6}$$

Code de Prüfer



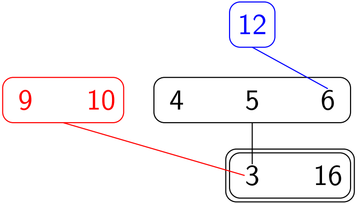
La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16, 12, 6, \mathbf{9}$$

Code de Prüfer



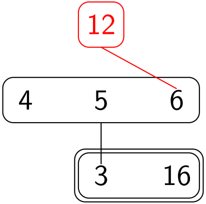
La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16,12,6,9,\mathbf{3}$$

Code de Prüfer



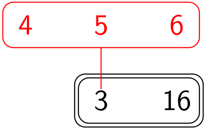
La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16,12,6,9,3,\mathbf{6}$$

Code de Prüfer



La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16,12,6,9,3,6,\mathbf{3}$$

Proposition

Soit L un ensemble fini de cardinal n et V une partition de L en $k+1$ parts $p_0, p_1, \ldots, p_k$. Le nombre d'arbre en boîtes qui a pour ensemble d'étiquettes L et pour ensemble de sommets V, est :

$$N_{L,V,p_0} = \#p_0 \times n^{k-1}.$$

La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{\mathbf{3},\mathbf{16}\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

$$\Rightarrow k+1 = 8 \text{ parts}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16, 12, 6, 9, 3, 6, \mathbf{3}$$

Nombres d'hyperarbres décorés

Théorème

Soit $\mathcal{S}$ une espèce, les séries génératrices des espèces d'hyperarbres décorés et enracinés décorés s'expriment :

$$S^{p}_{\mathcal{S}}(x) = x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathcal{S}}(k, n-1)\, n^{k}\frac{x^{n}}{n!}, \tag{1}$$

et

$$S_{\mathcal{S}}(x) = x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathcal{S}}(k, n-1)\, n^{k-1}\frac{x^{n}}{n!}, \tag{2}$$

où $E_{\mathcal{S}}(k, n)$ est le nombre d'ensembles de k ensembles $\mathcal{S}'$-décorés sur n sommets.

Exemple 1 : Décoration par les listes

- Soit $\mathbb{L}$ l'espèce des listes. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k listes est $\binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par $\mathbb{L}$ sont alors :

$$S_{\mathcal{S}}^{p}(x) = x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}\frac{(n-1)!}{k!}n^k\frac{x^n}{n!}.$$

Exemple 2 : Décoration par les ensembles pointés

- Soit $\mathbb{P}$ l'espèce des ensembles pointés. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k ensembles pointés est $\binom{n}{k} k^{n-k}$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par $\mathbb{P}$ sont alors :

$$S_{\mathcal{S}}^{p}(x) = x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} k^{n-1-k} n^{k} \frac{x^n}{n!}.$$

Exemple 3 : Décoration par les arbres enracinés

- Soit $\mathbb{A}$ l'espèce des arbres enracinés. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k arbres est $\binom{n}{k} k \times n^{n-1-k}$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par $\mathbb{A}$ sont alors :
$$S_{\mathcal{S}}^{p}(x) = x + \sum_{n \geq 2} n\,(2n-1)^{n-2}\,\frac{x^n}{n!}.$$

Merci de votre attention !

[1] Bérénice Oger *Decorated hypertrees*. Journal of Combinatorial Theory A, juillet 2013.