Arbres en boîtes et hyperarbres décorés

Bérénice Oger

Institut Camille Jordan (Lyon)

Mercredi 28 août 2013

Sommaire

Introduction

- Hyperarbres définis par C. Berge dans les années 1980
- Poset sur les hyperarbres utilisé par C. Jensen, J. McCammond et J. Meier dans les années 2000 pour l'étude d'un sous-groupe du groupe des automorphismes du groupe libre
- Action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres étudiée par F. Chapoton et B.O.

$$\Downarrow$$

Les formules obtenues font intervenir des hyperarbres décorés

But :

Compter ces hyperarbres décorés

Érable, Chêne, . . . , et autres espèces d'arbres

Définition

Une espèce F *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. A un ensemble fini* I, *l'espèce* F *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de* I.

Érable, Chêne, ..., et autres espèces d'arbres

Définition

Une espèce F *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. A un ensemble fini* I, *l'espèce* F *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de* I.

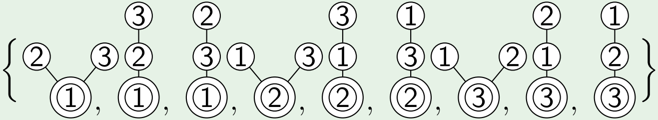
Contre-exemples

Les ensembles suivants ne peuvent pas être obtenus comme l'image d'un ensemble par une espèce :

- $\{(1, \mathbf{3}, 2), (2, 1, \mathbf{3}), (2, \mathbf{3}, 1)(3, 1, \mathbf{2})\}$(ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$ avec exactement une descente)
- (graphe de divisibilité de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

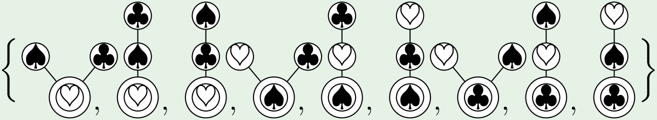
$$\begin{tikzcd}
 & & 2 \arrow[r] \arrow[dr] & 4 \\
5 & 1 \arrow[l] \arrow[ur] \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 6
\end{tikzcd}$$

Exemples

- $\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$ (espèce $\mathbb{L}$ des listes sur $\{1,2,3\}$)
- $\{\{1,2,3\}\}$ (espèce des ensembles $\mathbb{E}$)
- $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ (espèce des ensembles pointés $\mathbb{P}$)
- 
(espèce des arborescences $\mathbb{A}$)

Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{1,2,3\}$.

Exemples

- $\{(\heartsuit,\spadesuit,\clubsuit),(\heartsuit,\clubsuit,\spadesuit),(\spadesuit,\heartsuit,\clubsuit),(\spadesuit,\clubsuit,\heartsuit),(\clubsuit,\heartsuit,\spadesuit),(\clubsuit,\spadesuit,\heartsuit)\}$ (espèce $\mathbb{L}$ des listes sur $\{\clubsuit,\heartsuit,\spadesuit\}$)
- $\{\{\heartsuit,\spadesuit,\clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles $\mathbb{E}$)
- $\{\{\heartsuit\},\{\spadesuit\},\{\clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles pointés $\mathbb{P}$)
-  (espèce des arborescences $\mathbb{A}$)

Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{\clubsuit,\heartsuit,\spadesuit\}$.

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivation)

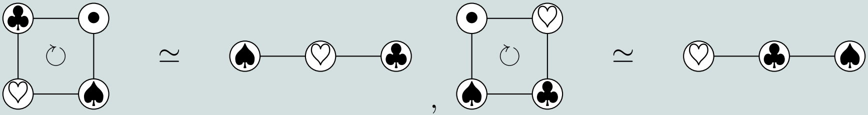
Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivation)

Exemple : La dérivée de l'espèce des cycles sur $I = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$



Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivation)
- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivation)
- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivation)
- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $(F \circ G)(I) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I)$ parcourt l'ensemble des partitions de I.

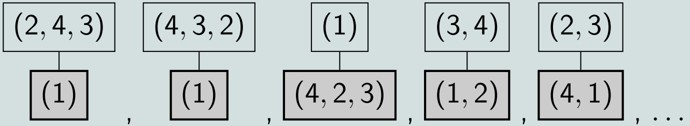
Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées :

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivation)
- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $(F \circ G)(I) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I)$ parcourt l'ensemble des partitions de I.

Exemple de substitution : Arborescences de listes sur $I = \{1, 2, 3, 4\}$



Définition

À une espèce F, on associe sa série génératrice :

$$C_F(x) = \sum_{n \geq 0} \#F(\{1, \ldots, n\}) \frac{x^n}{n!}.$$

Définition

À une espèce F, on associe sa série génératrice :

$$C_F(x) = \sum_{n \geq 0} \#F(\{1, \dots, n\}) \frac{x^n}{n!}.$$

Exemples de séries génératrices :

- La série génératrice de l'espèce des listes est $C_{\mathbb{L}} = \frac{1}{1-x}$.
- La série génératrice de l'espèce des ensembles est $C_{\mathbb{E}} = \exp(x)$.
- La série génératrice de l'espèce des ensembles pointés est $C_{\mathbb{P}} = x \cdot \exp(x)$.
- La série génératrice de l'espèce des arborescences est $C_{\mathbb{A}} = \sum_{n \geq 0} n^{n-1} \frac{x^n}{n!}$.
- La série génératrice de l'espèce des cycles est $C_{\mathbb{C}} = -\ln(1-x)$.

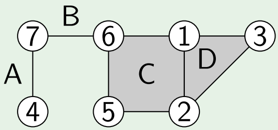
Hypergraphes et hyperarbres

Définition

Un hypergraphe (sur un ensemble V) est un couple (V, E) où :

- *V est un ensemble fini, (sommets)*
- *E est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de V, $\mathcal{P}(V)$. (arêtes)*

Exemple d'hypergraphe sur $[1; 7]$



.

Marche sur un hypergraphe

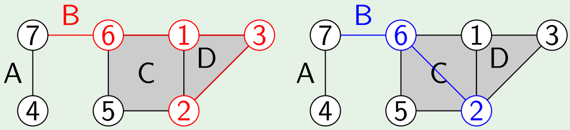
Définition

Soit $H = (V, E)$ un hypergraphe.
Une marche d'un sommet ou d'une arête d vers un sommet ou une arête f de H est une suite alternée de sommets et d'arêtes, commençant par d et terminant par f :

$$(d, \ldots, e_i, v_i, e_{i+1}, \ldots, f)$$

où pour tout i, $v_i \in V$, $e_i \in E$ et $\{v_i, v_{i+1}\} \subseteq e_i$. La longueur de la marche est le nombre de sommets et d'arêtes de la marche.

Exemples de marches



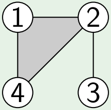
Hyperarbres

Définition

Un hyperarbre est un hypergraphe non trivial H tel que, pour toute paire de sommets distincts v et w de H,

- *il existe une marche de v à w dans H avec des arêtes disjointes e_i (H est connexe),*
- *cette marche est unique (H n'a pas de cycles).*

Exemple d'un hyperarbre



Hyperarbres pointés et enracinés

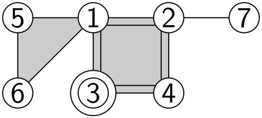
Définition

Un hyperarbre enraciné/pointé en une arête/pointé en un drapeau est un hyperarbre avec un sommet distingué (racine)/une arête distinguée/un sommet distingué dans une arête distinguée.

Hyperarbres pointés et enracinés

Définition

Un hyperarbre enraciné/pointé en une arête/pointé en un drapeau est un hyperarbre avec un sommet distingué (racine)/une arête distinguée/un sommet distingué dans une arête distinguée.



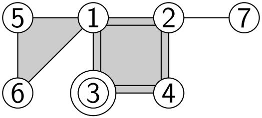
Hyperarbres pointés et enracinés

Définition

Un hyperarbre enraciné/pointé en une arête/pointé en un drapeau est un hyperarbre avec un sommet distingué (racine)/une arête distinguée/un sommet distingué dans une arête distinguée.

Définition

Un hyperarbre creux sur I est un hyperarbre sur l'ensemble $\{\#\} \cup I$, tel que le sommet étiqueté $\#$, appelé "creux", n'appartienne qu'à une et une seule arête.



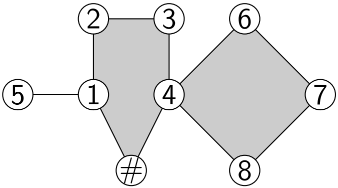
Hyperarbres pointés et enracinés

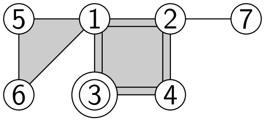
Définition

Un hyperarbre enraciné/pointé en une arête/pointé en un drapeau est un hyperarbre avec un sommet distingué (racine)/une arête distinguée/un sommet distingué dans une arête distinguée.

Définition

Un hyperarbre creux sur I est un hyperarbre sur l'ensemble $\{\#\} \cup I$, tel que le sommet étiqueté $\#$, appelé "creux", n'appartienne qu'à une et une seule arête.





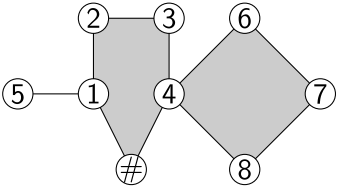
Hyperarbres pointés et enracinés

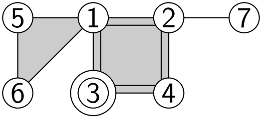
Définition

Un hyperarbre enraciné/pointé en une arête/pointé en un drapeau est un hyperarbre avec un sommet distingué (racine)/une arête distinguée/un sommet distingué dans une arête distinguée.

Définition

Un hyperarbre creux sur I est un hyperarbre sur l'ensemble $\{\#\} \cup I$, tel que le sommet étiqueté $\#$, appelé "creux", n'appartienne qu'à une et une seule arête.





Hyperarbres décorés

Définition

Etant donnée une espèce $\mathcal{S}$, un hyperarbre décoré (éventuellement pointé ou enraciné) est obtenu à partir d'un hyperarbre H (éventuellement pointé ou enraciné) en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e.

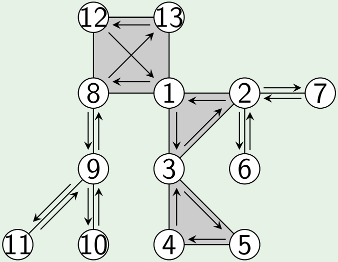
Hyperarbres décorés

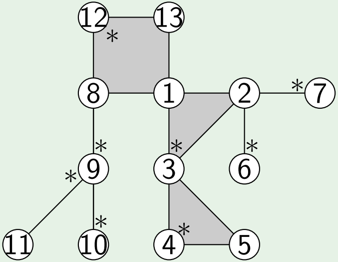
Définition

Etant donnée une espèce $\mathcal{S}$, un hyperarbre décoré (éventuellement pointé ou enraciné) est obtenu à partir d'un hyperarbre H (éventuellement pointé ou enraciné) en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}\,(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e.

Deux décorations différentes du même hyperarbre H :

par l'espèce des cycles et par l'espèce des ensembles pointés.





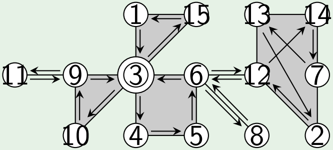
Définition alternative pour la décoration des hyperarbres enracinés et creux

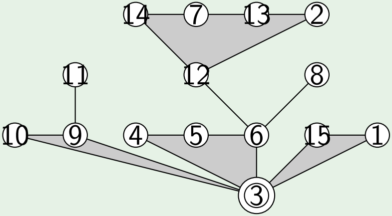
Pétiole = sommet par lequel l'arête est attachée à la racine

Proposition

Si H enraciné ou creux,
la décoration de H par une espèce S équivaut au
choix pour chaque arête e d'un élément de l'ensemble $\mathcal{S}'\left(V_e^l\right)$,
où l'ensemble V_e^l est l'ensemble des sommets de e distincts de la pétiole,
de la racine ou du creux.

Décoration d'un hyperarbre par l'espèce des cycles





Notations

$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ = espèce des hyperarbres décorés

$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{p}$ = espèce des hyperarbres enracinés décorés

$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{a}$ = espèce des hyperarbres pointés en une arête décorés

$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{pa}$ = espèce des hyperarbres pointés en un drapeau décorés

$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{c}$ = espèce des hyperarbres creux décorés

X= espèce des singletons

Relations entre espèces

Étant donnée une espèce $\mathcal{S}$ (avec $\mathcal{S}[\emptyset] = \mathcal{S}[\bullet] = \emptyset$), on a les relations suivantes :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{pa} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{p} + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{a}.\text{(Principe de dissymétrie)}$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{p} = X \times \mathcal{H}'_{\mathcal{S}},$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{p} = X + X \times \mathbb{E}^{+} \circ (\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{c}),$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{c} = S' \circ \mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{p},$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{a} = S \circ \mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{p},$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{pa} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{c} \times \mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{p} = X \times (X(1 + \mathbb{E}^{+})) \circ \mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{c}.$$

D'où les formules implicites suivantes :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{p} = X + X \times \mathbb{E}^{+} \circ (S' \circ \mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{p})$$

et

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{c} = S' \circ (X + X \times \mathbb{E}^{+} \circ (\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{c}))\,.$$

1. Des espèces aux hyperarbres décorés
   - Qu'est-ce qu'une espèce ?
   - Les espèces d'hyperarbres
   - Hyperarbres décorés
   - Relations entre espèces

2. Lien avec les arbres en boîtes
   - Arbres en boîtes
   - Compter les hyperarbres décorés avec les arbres en boîtes

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés *étiquettes*,

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés *étiquettes*,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés *sommets*,

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés *étiquettes*,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés *sommets*,
- R est un élément de V appelé racine,

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés *étiquettes*,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés *sommets*,
- R est un élément de V appelé racine,
- E est une application de $V - \{R\}$ dans L appelé l'ensemble des *arêtes*.

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés *étiquettes*,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés *sommets*,
- R est un élément de V appelé racine,
- E est une application de $V - \{R\}$ dans L appelé l'ensemble des *arêtes*.

On note $\tilde{E}$, l'application de $V - \{R\}$ dans V qui associe à un sommet v le sommet v' contenant l'étiquette $E(v)$. Le couple $\left(V, \tilde{E}\right)$ forme alors un graphe orienté dont les sommets sont étiquetés par des sous-ensembles de L.

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E), où

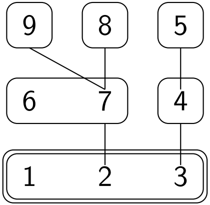
- L est un ensemble fini d'éléments appelés *étiquettes*,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés *sommets*,
- R est un élément de V appelé racine,
- E est une application de $V - \{R\}$ dans L appelé l'ensemble des *arêtes*.

On note $\tilde{E}$, l'application de $V - \{R\}$ dans V qui associe à un sommet v le sommet v' contenant l'étiquette $E(v)$. Le couple $\left(V, \tilde{E}\right)$ forme alors un graphe orienté dont les sommets sont étiquetés par des sous-ensembles de L.

Définition

Le quadruplet (L, V, R, E) est un arbre en boîte si et seulement si le graphe $\left(V, \tilde{E}\right)$ est un arbre, enraciné en R, dont les arêtes sont orientés vers la racine.
L'étiquette l est le parent d'un sommet v si $E(v) = l$.

Un arbre en boîte

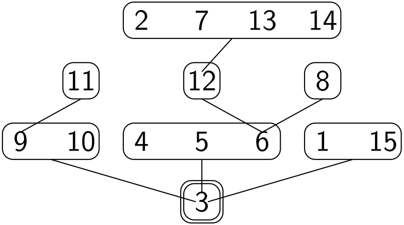


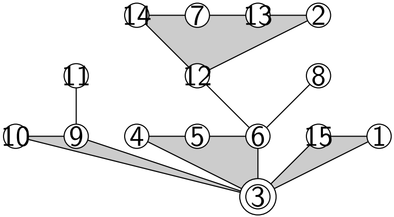
Lien entre hyperarbres enracinés décorés et arbres en boîtes

Proposition

Soit $\mathcal{S}$ une espèce, tout hyperarbre enraciné décoré par $\mathcal{S}$, sur k arêtes et n sommets, peut se décomposer en un triplet $(r, \mathbb{S}, BT)$ où :

- *r est la racine de l'hyperarbre,*
- *$\mathbb{S}$ est un ensemble de k ensembles décorés par $\mathcal{S}'$ sur $n-1$ sommets,*
- *et BT est un arbre en boîtes sur $k+1$ sommets avec une racine étiquetée par r et les autres sommets étiquetés par les ensembles de $\mathbb{S}$*



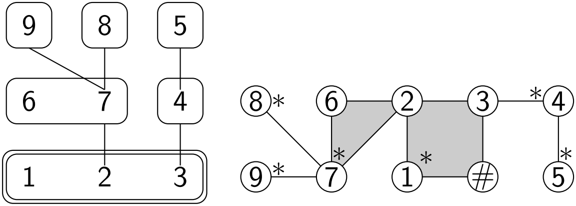


Lien entre hyperarbres creux décorés et arbres en boîtes

Proposition

Etant donnée une espèce $\mathcal{S}$, tout hyperabre creux décoré par $\mathcal{S}$ sur k arêtes et n sommets, peut se décomposer en un couple $(\mathbb{S}, BT)$ où :

- *$\mathbb{S}$ est un ensemble de k ensembles $\mathcal{S}'$- décorés sur n sommets,*
- *et BT est un arbre en boîtes sur k sommets dont les sommets sont étiquetés par les ensembles de $\mathbb{S}$*



Comptons les arbres en boîtes

Proposition

Soit L un ensemble fini de cardinal n et V une partition de L en $k+1$ parts $p_0, p_1, \ldots, p_k$. Le nombre d'arbre en boîte qui a pour ensemble d'étiquettes L et pour ensemble de sommets V, est :

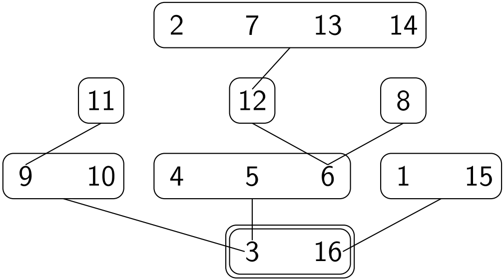
$$N_{L,V,p_0} = \#p_0 \times n^{k-1}.$$

Démonstration.

1. Par récurrence
2. Code de Prüfer

$\square$

Code de Prüfer

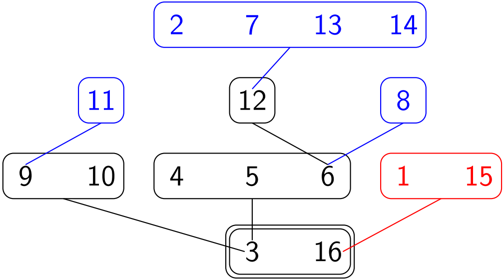


La partition associée est :

$$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

Code de Prüfer

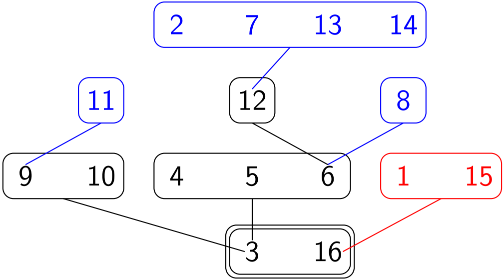


La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

Code de Prüfer



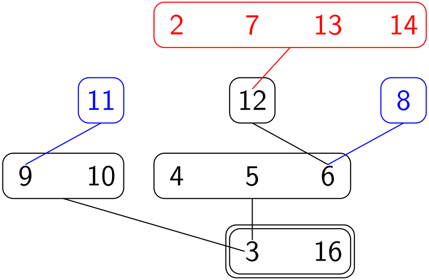
La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

16

Code de Prüfer



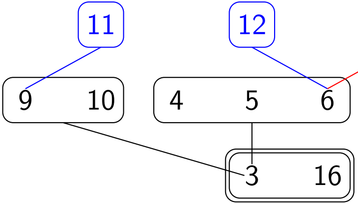
La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16,\mathbf{12}$$

Code de Prüfer



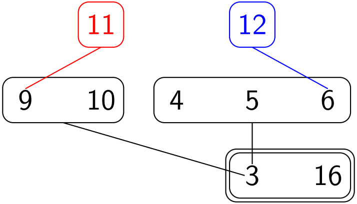
La partition associée est :

$$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16, 12, \mathbf{6}$$

Code de Prüfer



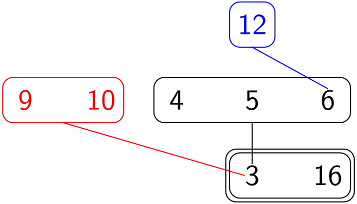
La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16,12,6,\mathbf{9}$$

Code de Prüfer



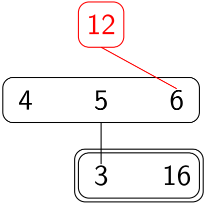
La partition associée est :

$$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16, 12, 6, 9, \mathbf{3}$$

Code de Prüfer



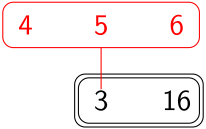
La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16,12,6,9,3,\mathbf{6}$$

Code de Prüfer



La partition associée est :

$$\{1,15\},\{2,7,13,14\},\{3,16\},\{4,5,6\},\{8\},\{9,10\},\{11\},\{12\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16,12,6,9,3,6,\mathbf{3}$$

Proposition

Soit L un ensemble fini de cardinal n et V une partition de L en $k+1$ parts $p_0, p_1, \ldots, p_k$. Le nombre d'arbre en boîte qui a pour ensemble d'étiquettes L et pour ensemble de sommets V, est :

$$N_{L,V,p_0} = \#p_0 \times n^{k-1}.$$

La partition associée est :

$$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{\mathbf{3}, \mathbf{16}\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$$

$$\Rightarrow k + 1 = 8 \text{ parts}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$16, 12, 6, 9, 3, 6, \mathbf{3}$$

Nombres d'hyperarbres décorés

Théorème

Soit $\mathcal{S}$ une espèce, les série génératrice des espèces d'hyperarbres décorés, enracinés décorés et creux décorés s'expriment :

$$S^{p}_{\mathcal{S}}\left(x\right) = x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathcal{S}}\left(k, n-1\right) n^{k} \frac{x^{n}}{n!}, \qquad (1)$$

$$S^{c}_{\mathcal{S}}\left(x\right) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} E_{\mathcal{S}}\left(k, n\right) n^{k-1} \frac{x^{n}}{n!} \qquad (2)$$

et

$$S_{\mathcal{S}}\left(x\right) = x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathcal{S}}\left(k, n-1\right) n^{k-1} \frac{x^{n}}{n!}, \qquad (3)$$

où $E_{\mathcal{S}}\left(k, n\right)$ est le nombre d'ensembles de k ensembles $\mathcal{S}'$-décorés sur n sommets.

Corollaire

Les séries génératrices des hyperarbres décorés pointés en un drapeau et pointés en une arête s'obtiennent alors par les relations :

$$S_{\mathcal{S}}^{pa}(x) = S_{\mathcal{S}}^{p}(x) \times S_{\mathcal{S}}^{c}(x),$$

$$S_{\mathcal{S}}^{a}(x) = S_{\mathcal{S}}(x) + S_{\mathcal{S}}^{pa}(x) - S_{\mathcal{S}}^{p}(x).$$

Nous avons alors obtenu les cardinaux des 5 types d'hyperarbres décorés.

Exemple 1

- Soit $\mathbb{L}^+$ l'espèce des listes non vides. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k listes est $\binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par $\mathbb{L}^+$ sont alors :

$$S^p_{\mathcal{S}}(x) = x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}\frac{(n-1)!}{k!}n^k\frac{x^n}{n!}$$

et

$$S^c_{\mathcal{S}}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}n^{k-1}\frac{x^n}{n!}.$$

Exemple 2

- Soit $\mathbb{P}^+$ l'espèce des ensembles pointés non vides. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k ensembles pointés est $\binom{n}{k}k^n$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par $\mathbb{P}^+$ sont alors :

$$S_{\mathcal{S}}^{p}(x) = x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}k^{n-1-k}n^{k}\frac{x^n}{n!}$$

et

$$S_{\mathcal{S}}^{c}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{n-k}n^{k-1}\frac{x^n}{n!}.$$

Exemple 3

- Soit $\mathbb{A}^+$ l'espèce des arborescences non vides. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k arbres est $\binom{n}{k} k \times n^{n-1-k}$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par $\mathbb{A}^+$ sont alors :

$$S^p_{\mathcal{S}}(x) = \frac{x}{t} + \sum_{n \geq 2} n\,(tn + n - 1)^{n-2} \frac{x^n}{n!}$$

et

$$S^c_{\mathcal{S}}(x) = \sum_{n \geq 1} (tn + n)^{n-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Merci de votre attention !

[1] Bérénice Oger *Decorated hypertrees*. Journal of Combinatorial Theory A, juillet 2013.