Hyperarbres et arbres enracinés

Bérénice Delcroix-Oger

Institut Camille Jordan (Lyon)

Jeudi 4 Décembre 2014

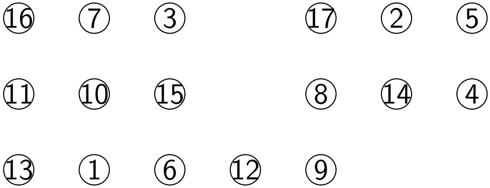
Sommaire

Sommaire

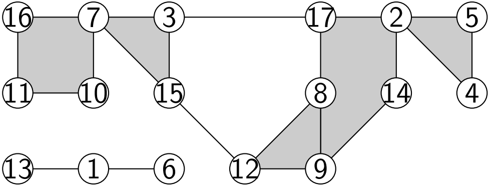
Sommaire

1. Des arbres aux hyperarbres
   - Hypergraphes et hyperarbres
   - Le poset des hyperarbres
   - Homologie et nombre de Möbius
2. Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\widehat{\mathrm{HT}}_n$
3. Hyperarbres décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$

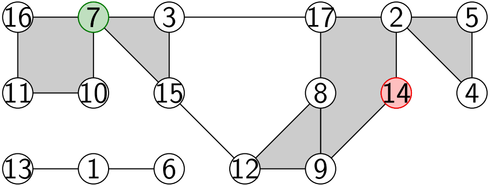
Hypergraphes et hyperarbres



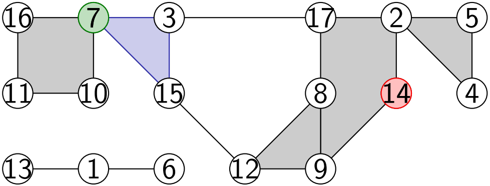
Hypergraphes et hyperarbres



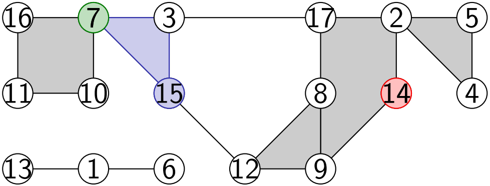
Hypergraphes et hyperarbres



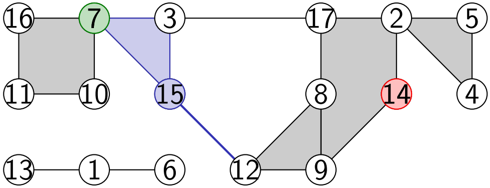
Hypergraphes et hyperarbres



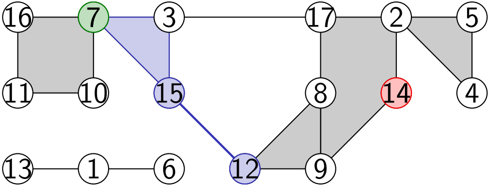
Hypergraphes et hyperarbres



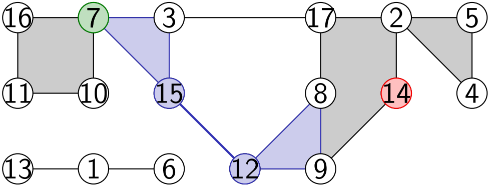
Hypergraphes et hyperarbres



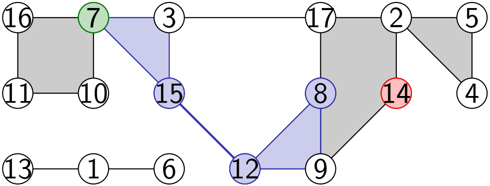
Hypergraphes et hyperarbres



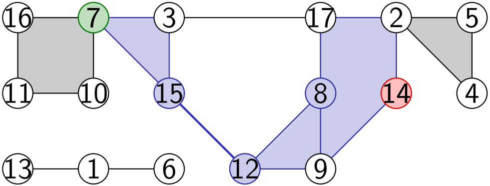
Hypergraphes et hyperarbres



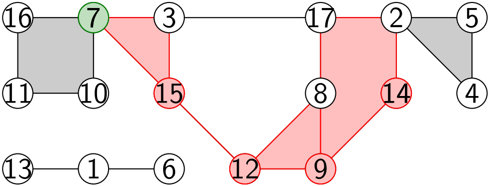
Hypergraphes et hyperarbres



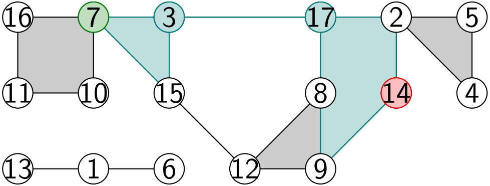
Hypergraphes et hyperarbres



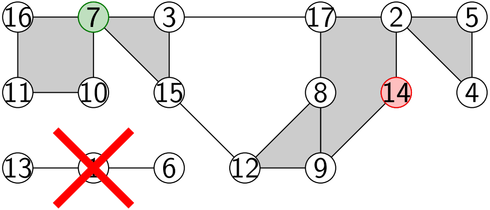
Hypergraphes et hyperarbres



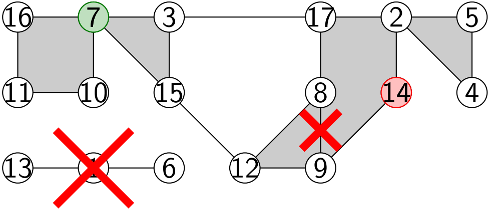
Hypergraphes et hyperarbres



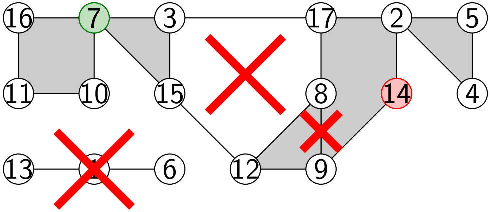
Hypergraphes et hyperarbres

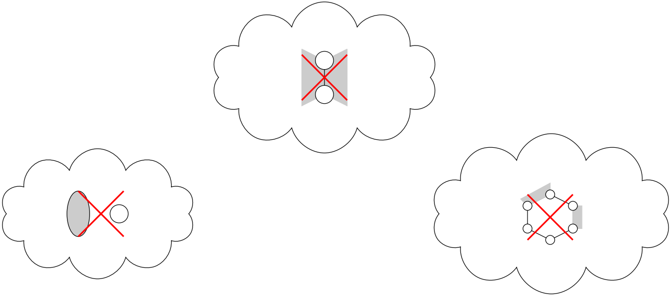


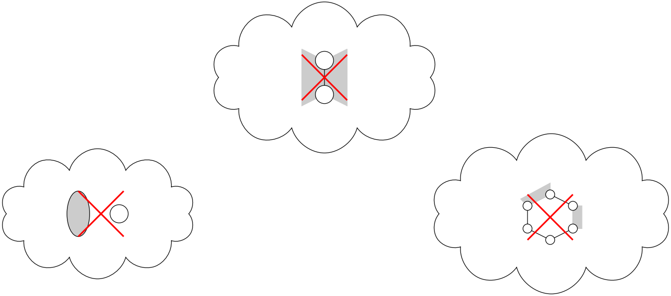
Hypergraphes et hyperarbres

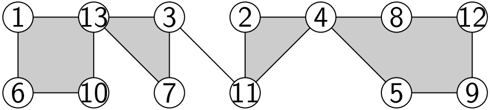


Hypergraphes et hyperarbres








1
13
3
2
4
8
12
6
10
7
11
5
9

Le poset des hyperarbres

Le poset des hyperarbres

Définition

Soit I un ensemble fini de cardinal n, S et T deux hyperarbres sur I.

$$S \preceq T \iff \textit{Toute arête de } S \textit{ est l'union d'arêtes de } T.$$

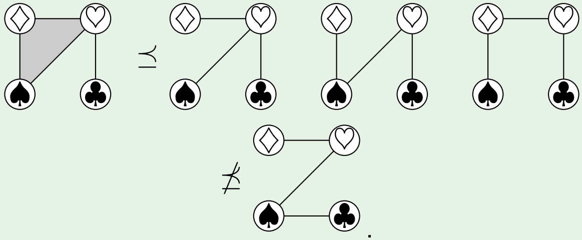
Le poset des hyperarbres

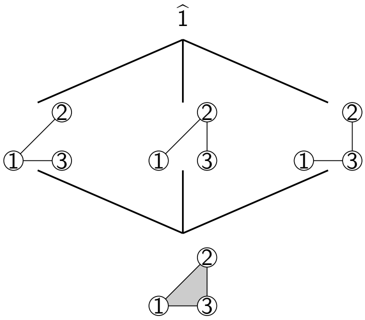
Définition

Soit I un ensemble fini de cardinal n, S et T deux hyperarbres sur I.

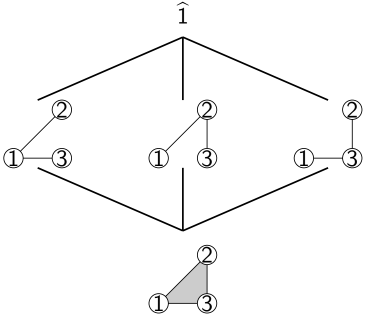
$$S \preceq T \iff \textit{Toute arête de } S \textit{ est l'union d'arêtes de } T.$$

Exemple pour les hyperarbres sur quatre sommets



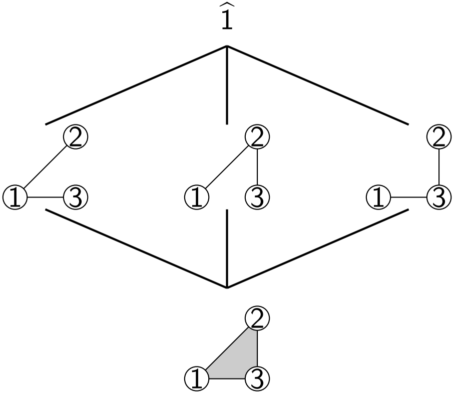


- $\widehat{\mathsf{HT}_\mathsf{n}}$ = poset augmenté des hyperarbres sur $[1, n]$.



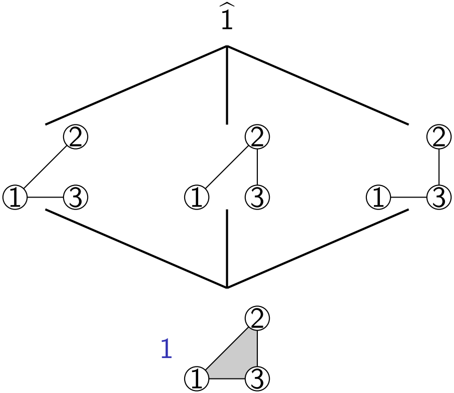
- $\widehat{\mathrm{HT}}_\mathrm{n}$ = poset augmenté des hyperarbres sur $[1, n]$.
- Étudié par D. McCullough et A. Miller (1996), N. Brady,J. McCammond,J. Meier et A. Miller (2001),puis C. Jensen, J. McCammond et J. Meier (2004, 2006 et 2007) pour l'étude de groupes d'automorphismes du groupe libre et de produits libres, et F. Chapoton (2007).

Nombre de Möbius du poset des hyperarbres



$$\mu(\hat{0},\hat{0}) = 1,$$
$$\mu(\hat{0},y) = -\sum_{\hat{0}\leq z<y} \mu(\hat{0},z), \qquad \forall y \in P.$$

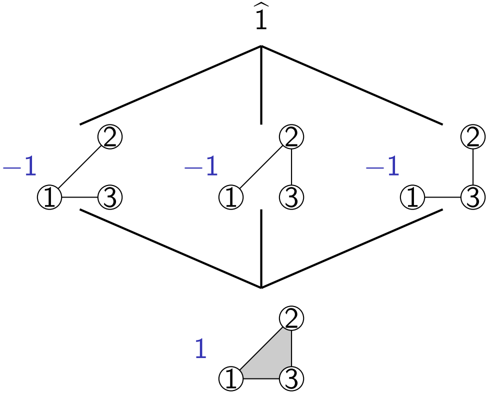
Nombre de Möbius du poset des hyperarbres



$$\mu(\hat{0},\hat{0}) = 1,$$

$$\mu(\hat{0},y) = -\sum_{\hat{0}\leq z<y} \mu(\hat{0},z), \qquad \forall y \in P.$$

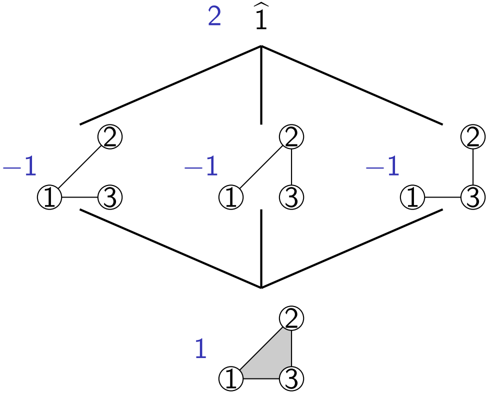
Nombre de Möbius du poset des hyperarbres



$$\mu(\hat{0}, \hat{0}) = 1,$$

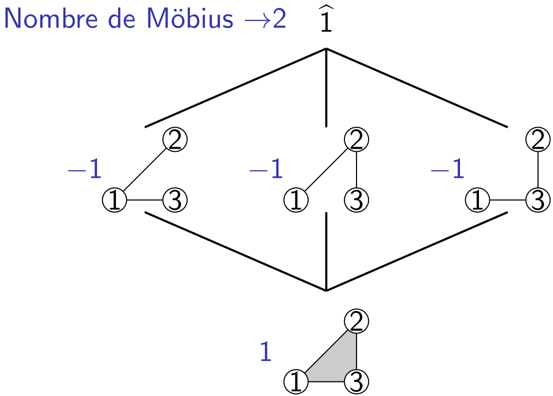
$$\mu(\hat{0}, y) = - \sum_{\hat{0} \leq z < y} \mu(\hat{0}, z), \qquad \forall y \in P.$$

Nombre de Möbius du poset des hyperarbres



$$\mu(\hat{0},\hat{0}) = 1,$$
$$\mu(\hat{0},y) = -\sum_{\hat{0}\leq z<y} \mu(\hat{0},z), \qquad \forall y \in P.$$

Nombre de Möbius du poset des hyperarbres



$$\mu(\hat{0}, \hat{0}) = 1,$$
$$\mu(\hat{0}, y) = -\sum_{\hat{0} \leq z < y} \mu(\hat{0}, z), \qquad \forall y \in P.$$

Homologie d'un poset

Pour tout poset P et tout entier naturel j,

$$C_j(P) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\{a_0 < \ldots < a_j, a_i \in P \forall i \in [\![0; j]\!]\}).$$

Homologie d'un poset

Pour tout poset P et tout entier naturel j,

$$C_j(P) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\{a_0 < \ldots < a_j, a_i \in P \forall i \in [\![0; j]\!]\}).$$

On définit l'application de bord $\partial_j : C_j(P) \to C_{j-1}(P)$ par :

$$\partial(x_0 < x_1 < \ldots < x_j) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i (x_0 < x_1 < \ldots < \hat{x}_i < \ldots < x_j).$$

On a $\partial_{j-1}\partial_j = 0$.

Homologie d'un poset

Pour tout poset P et tout entier naturel j,

$$C_j(P) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\{a_0 < \ldots < a_j, a_i \in P \forall i \in [\![0; j]\!]\}).$$

On définit l'application de bord $\partial_j : C_j(P) \to C_{j-1}(P)$ par :

$$\partial(x_0 < x_1 < \ldots < x_j) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i (x_0 < x_1 < \ldots < \hat{x}_i < \ldots < x_j).$$

On a $\partial_{j-1}\partial_j = 0$.
L'homologie mesure le défaut d'exactitude. Elle est définie par :

$$\tilde{H}_j(P) = \ker \partial_j / \operatorname{im} \partial_{j+1}.$$

Caractère Cohen-Macaulay

Définition

Un poset est Cohen-Macaulay si et seulement si tous ses groupes d'homologie réduite sont nuls, sauf celui en degré maximal.

Caractère Cohen-Macaulay

Définition

Un poset est Cohen-Macaulay si et seulement si tous ses groupes d'homologie réduite sont nuls, sauf celui en degré maximal.

Proposition (McCammond et Meier, 2004)

Le poset des hyperarbres sur n sommets est Cohen-Macaulay, pour tout $n \geq 1$.

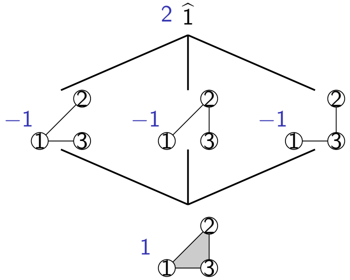
Lien entre le nombre de Möbius d'un poset et son homologie

Nous relions maintenant ces deux notions :

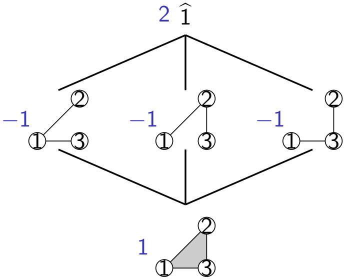
$$\mu(\widehat{HT_n}) = \dim \widetilde{H}_{n-3}(\widehat{HT_n}) = (-1)^m \sum_{j \geq -1} (-1)^j C_j(\widehat{HT_n}),$$

où $C_j(\widehat{HT_n})$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des $j+1$-chaînes sur $\widehat{HT_n}$.

Retour sur le nombre de Möbius du poset des hyperarbres



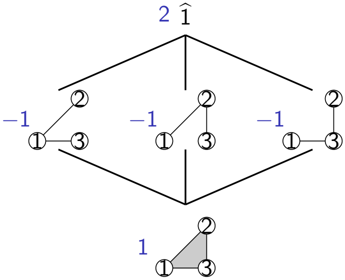
Retour sur le nombre de Möbius du poset des hyperarbres



Nombre de Möbius du poset des hyperarbres sur n sommets

$(n-1)^{n-2}$ [McCammond et Meier, 2004]

Retour sur le nombre de Möbius du poset des hyperarbres

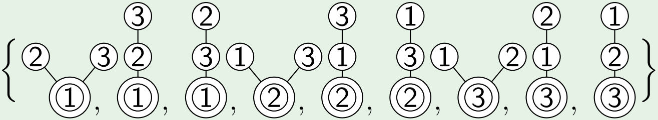


Nombre de Möbius du poset des hyperarbres sur n sommets

$(n-1)^{n-2}$ [McCammond et Meier, 2004]

Espèces

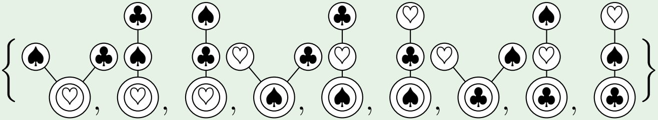
Exemples

- $\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$ (espèce des listes $\mathbb{L}$)
- $\{\{1,2,3\}\}$ (espèce des ensembles $\mathbb{E}$)
- $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ (espèce des ensembles pointés $\mathbb{P}$)
- 
  (espèce des arbres enracinés $\mathbb{A}$)

Les ensembles ci-dessus sont des images par des espèces de l'ensemble $\{1,2,3\}$.

Espèces

Exemples

- $\{(\heartsuit,\spadesuit,\clubsuit), (\heartsuit,\clubsuit,\spadesuit), (\spadesuit,\heartsuit,\clubsuit), (\spadesuit,\clubsuit,\heartsuit), (\clubsuit,\heartsuit,\spadesuit), (\clubsuit,\spadesuit,\heartsuit)\}$ (espèce des listes $\mathbb{L}$)
- $\{\{\heartsuit,\spadesuit,\clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles $\mathbb{E}$)
- $\{\{\heartsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles pointés $\mathbb{P}$)
- 

  (espèce des arbres enracinés $\mathbb{A}$)

Les ensembles ci-dessus sont des images par des espèces de l'ensemble $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

Définition formelle

Définition

Une espèce F *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. À un ensemble fini I, l'espèce* F *associe un ensemble fini* $\mathsf{F}(I)$ *indépendant de la nature de I.*

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)

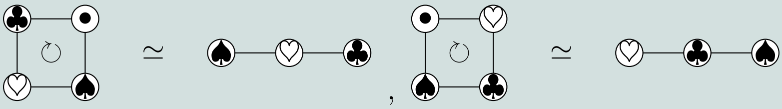
Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)

Exemple : dérivée de l'espèce des cycles pour $I = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$



Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F + G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \cdot G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \cdot G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $(F \circ G)(I) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I)$ décrit l'ensemble des partitions de I.

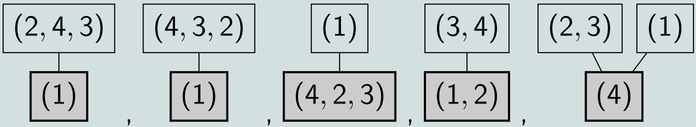
Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G, deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \cdot G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $(F \circ G)(I) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I)$ décrit l'ensemble des partitions de I.

Exemple de substitution : Arbres enracinés de listes sur $I = \{1, 2, 3, 4\}$



, , , , , ...

Définition

À une espèce F, on associe sa série génératrice :

$$C_F(x) = \sum_{n \geq 0} \# F(\{1, \ldots, n\}) \frac{x^n}{n!}.$$

Exemples de séries génératrices :

- La série génératrice de l'espèce des listes est $C_{\mathbb{L}} = \frac{1}{1-x}$.
- La série génératrice de l'espèce des ensembles est $C_{\mathbb{E}} = \exp(x)$.
- La série génératrice de l'espèce des ensembles pointés est $C_{\mathbb{P}} = x \cdot \exp(x)$.
- La série génératrice de l'espèce des arbres enracinés est $C_{\mathbb{A}} = \sum_{n \geq 0} n^{n-1} \frac{x^n}{n!}$.

Définition

La série indicatrice de cycles d'une espèce F est la série formelle en une infinité de variables $\mathfrak{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ definie par :

$$Z_F(\mathfrak{p}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} F^\sigma p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} p_3^{\sigma_3} \ldots\right),$$

- *avec F^σ, l'ensemble des F-structures fixées par l'action de σ,*
- *et σ_i, le nombre de cycles de longueur i dans la décomposition en cycles disjoints de σ.*

- La série indicatrice de cycles de l'espèce des listes est $Z_{\mathbb{L}} = \frac{1}{1-p_1}$.
- La série indicatrice de cycles de l'espèce des ensembles est $Z_{\mathbb{E}} = \exp(\sum_{k\geq 1} \frac{p_k}{k})$.
- La série indicatrice de cycles de l'espèce des ensembles pointés est $Z_{\mathbb{P}} = p_1 \cdot \exp(\sum_{k\geq 1} \frac{p_k}{k})$.

Opérations

Proposition

Soient F et G deux espèces. Leurs séries indicatrices de cycles vérifient :

$$\begin{aligned} Z_{F+G} &= Z_F + Z_G, & Z_{F\cdot G} &= Z_F \times Z_G, \\ Z_{F\circ G} &= Z_F \circ Z_G, & Z_{F'} &= \frac{\partial Z_F}{\partial p_1}. \end{aligned}$$

Retour aux chaînes

Pour un entier $n \geq 3$,

Définition

Une k-chaîne stricte d'hyperarbres sur I est un k-uplet $(a_1, \dots, a_k)$, où les a_i sont des hyperarbres sur I différents du minimum $\hat{0}$ et $a_i \prec a_{i+1}$.

Proposition

Comme $\widehat{HT}_n$ est Cohen-Macaulay, le caractère de l'action du groupe symétrique sur $\tilde{H}_{n-3}$ est donné en fonction des caractères de l'action du groupe symétrique sur C_k par :

$$\chi_{\tilde{H}_{n-3}} = (-1)^{n-3} \sum_{k=-1}^{n-3} (-1)^k \chi_{C_k}, \text{ où } n = \#I.$$

Compter les chaînes strictes à l'aide de chaînes larges

Soit I un ensemble de cardinal n.

Définition

Une k-chaîne large d'hyperarbres sur I est un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, où les a_i sont des hyperarbres sur I et $a_i \preceq a_{i+1}$.

Compter les chaînes strictes à l'aide de chaînes larges

Soit I un ensemble de cardinal n.

Définition

Une k-chaîne large d'hyperarbres sur I est un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, où les a_i sont des hyperarbres sur I et $a_i \preceq a_{i+1}$.

Soit $M_{k,s}$ l'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$ de longueur k, contenant s lettres "1". L'espèce $\mathcal{M}_{k,s}$ est définie par :

$$\begin{cases} \emptyset & \mapsto & M_{k,s}, \\ V \neq \emptyset & \mapsto & \emptyset. \end{cases}$$

Compter les chaînes strictes à l'aide de chaînes larges

Soit I un ensemble de cardinal n.

Définition

Une k-chaîne large d'hyperarbres sur I est un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, où les a_i sont des hyperarbres sur I et $a_i \preceq a_{i+1}$.

Soit $M_{k,s}$ l'ensemble des mots sur $\{0,1\}$ de longueur k, contenant s lettres "1". L'espèce $\mathcal{M}_{k,s}$ est définie par :

$$\begin{cases} \emptyset & \mapsto & M_{k,s}, \\ V \neq \emptyset & \mapsto & \emptyset. \end{cases}$$

Proposition

Les espèces $\mathcal{H}_k$ des k-chaînes larges et $\mathcal{H}_i^s$ des i-chaînes strictes sont reliées par :

$$\mathcal{H}_k \cong \sum_{i \geq 0} \mathcal{H}_i^s \cdot \mathcal{M}_{k,i}.$$

Proposition

Les espèces $\mathcal{H}_k$ des k-chaînes larges et $\mathcal{HS}_i$ des i-chaînes strictes sont reliées par :

$$\mathcal{H}_k \cong \sum_{i\geq 0} \mathcal{H}_i^s \cdot \mathcal{M}_{k,i}.$$

Démonstration.

$$\begin{tikzcd} & \boxed{(a_{i_1},\dots,a_{i_s})} \\ \boxed{(a_1,\dots,a_k)} \arrow[ur, "\text{Elimination des répétitions}"] \arrow[dr, "u_j = 0 \text{ si } a_j = a_{j-1},\ 1 \text{ sinon}"'] & \\ & \boxed{(u_1,\dots,u_k)} \end{tikzcd}$$

en posant $a_0 = \hat{0}$. □

La proposition précédente donne, pour tout entier naturel k :

$$\chi_k = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \chi_i^s.$$

La proposition précédente donne, pour tout entier naturel k :

$$\chi_k = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \chi_i^s.$$

χ_k est donc un polynome $P(k)$ en k qui donne, évalué en -1, le caractère voulu :

Corollaire

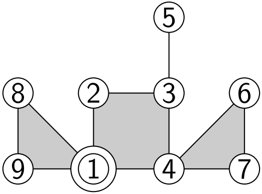
$$\chi_{\tilde{H}_{n-3}} = (-1)^n P(-1) =: (-1)^n \chi_{-1}$$

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, les hyperarbres seront sur $\{1, \ldots, n\}$.

Hyperarbres enracinés et creux

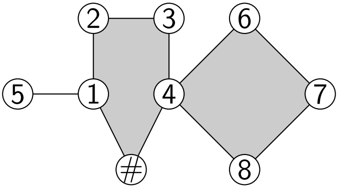
Définition

Soit un hyperarbre H sur I. H est enraciné en un sommet s si un sommet s de H est distingué.



Définition

Un hyperarbre creux sur n sommets ($n \geq 1$) est un hyperarbre sur l'ensemble $\{\#, 1, \ldots, n\}$, tel que le sommet étiqueté par $\#$, appelé le creux, appartienne à une et une seule arête.



On note $\mathcal{H}_k^{cm}$, l'espèce des k-chaînes d'hyperarbres dont le minimum est un hyperarbre creux à une seule arête et $\mathcal{H}_k^{c}$, l'espèce des k-chaînes d'hyperarbres dont le minimum est un hyperarbre creux.

Relations entre les espèces d'hyperarbres

Théorème

Les espèces $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k^p$, $\mathcal{H}_k^c$ et $\mathcal{H}_k^{cm}$ vérifient :

$$\mathcal{H}_k^p = X \cdot \mathcal{H}_k'$$

$$\mathcal{H}_k^p = X \cdot \mathbb{E} \circ \mathcal{H}_k^c,$$

$$\mathcal{H}_k^c = \mathcal{H}_k^{cm} \circ \mathcal{H}_k^p,$$

$$\mathcal{H}_k^{cm} = \mathbb{E} \circ \mathcal{H}_{k-1}^c - 1.$$

Relations entre les espèces d'hyperarbres

Théorème

Les espèces $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{H}_k^p$, $\mathcal{H}_k^c$ et $\mathcal{H}_k^{cm}$ vérifient :

$$\mathcal{H}_k^p = X \cdot \mathcal{H}_k'$$

$$\mathcal{H}_k^p = X \cdot \mathbb{E} \circ \mathcal{H}_k^c,$$

$$\mathcal{H}_k^c = \mathcal{H}_k^{cm} \circ \mathcal{H}_k^p,$$

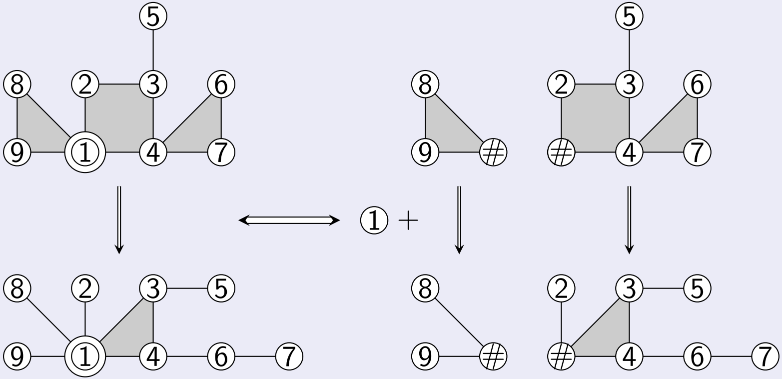
$$\mathcal{H}_k^{cm} = \mathbb{E} \circ \mathcal{H}_{k-1}^c - 1.$$

Démonstration.

1. Pointer une espèce revient à faire le produit de l'espèce singleton X et de sa dérivée,
2. On sépare la racine et chacune des arêtes la contenant, laissant des creux là où était la racine,

Suite de la démonstration.

$$\mathcal{H}_k^p = X \cdot \mathbb{E} \circ \mathcal{H}_k^c,$$



Dimension de l'homologie

Théorème (McCammond et Meier, 2004)

La dimension du seul groupe d'homologie non trivial du poset des hyperarbres est $(n-1)^{n-2}$.

Cette dimension est le nombre d'arbres enracinés sur $n-1$ sommets.

Utilisant les relations sur les espèces établies précédemment :

Proposition

Les séries indicatrices de cycles Z_k et Z_k^p satisfont les relations suivantes :

$$Z_k + Z_{k-1}^p \circ Z_k^p = Z_k^p + Z_{k-1} \circ Z_k^p,$$

$$Z_k^p = p_1 \cdot \mathbb{E} \circ \left(\frac{Z_{k-1}^p \circ Z_k^p - Z_k^p}{Z_k^p} \right),$$

et

$$p_1 \frac{\partial Z_k}{\partial p_1} = Z_k^p.$$

Notons M, la série indicatrice de cycles correspondant à l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur les arbres enracinés à $n-1$ sommets.

Théorème (O., conjecture de Chapoton (2007))

La série indicatrice de cycle Z_{-1}, qui donne le caractère de l'action $\mathfrak{S}_n$ sur $\tilde{H}_{n-3}$, est donnée par :

$$Z_{-1} = p_1 - \Sigma M.$$

La série indicatrice de cycles Z_{-1}^p est donnée par :

$$Z_{-1}^p = p_1 \left(\Sigma \operatorname{PreLie} + 1 \right).$$

1. Des arbres aux hyperarbres

2. Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\widehat{\mathrm{HT}}_n$

3. Hyperarbres décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$
   - Hyperarbres décorés
   - Dénombrement
   - Lien entre les hyperarbres décorés et les arbres bicolorés

Hyperarbres décorés

Définition

Soit $\mathcal{S}$ une espèce, un hyperarbre décoré (éventuellement enraciné) est obtenu à partir d'un hyperarbre H (éventuellement enraciné) en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e.

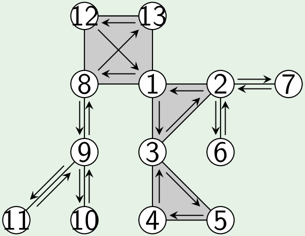
Hyperarbres décorés

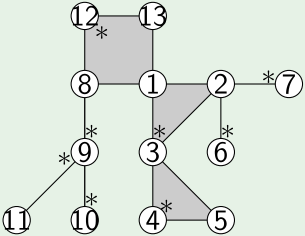
Définition

Soit $\mathcal{S}$ une espèce, un hyperarbre décoré (éventuellement enraciné) est obtenu à partir d'un hyperarbre H (éventuellement enraciné) en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e.

Deux décorations différentes du même hyperarbre H :

par l'espèce des cycles et par l'espèce des ensembles pointés.





Définition équivalente

Définition

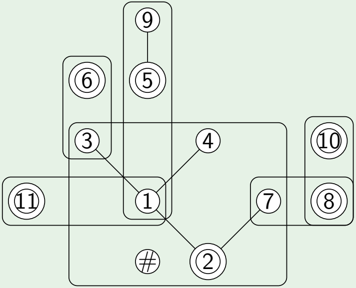
Soit $\mathcal{S}$ une espèce, un hyperarbre décoré enraciné ou creux est obtenu à partir d'un hyperarbre H de même type en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}'(V_e')$, où V_e' est l'ensemble des sommets de l'arête e différent du pétiole.

Définition équivalente

Définition

Soit $\mathcal{S}$ une espèce, un hyperarbre décoré enraciné ou creux est obtenu à partir d'un hyperarbre H de même type en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}'(V_e')$, où V_e' est l'ensemble des sommets de l'arête e différent du pétiole.

Décoration : par l'espèce des arbres enracinés.



Nombres d'hyperarbres décorés

Théorème (O.)

Soit $\mathcal{S}$ une espèce, les séries génératrices des espèces d'hyperarbres décorés et enracinés décorés s'expriment :

$$\mathbf{C}^p_{\mathcal{S}}(x) = x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathcal{S}}(k, n-1)\, n^k \frac{x^n}{n!},$$

et

$$\mathbf{C}_{\mathcal{S}}(x) = x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathcal{S}}(k, n-1)\, n^{k-1} \frac{x^n}{n!},$$

où $E_{\mathcal{S}}(k, n)$ est le nombre d'ensembles de k ensembles $\mathcal{S}'$-décorés sur n sommets.

Exemple : Décoration par les arbres enracinés

- Soit $\mathbb{A}$ l'espèce des arbres enracinés. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k arbres est $\binom{n}{k} k \times n^{n-1-k}$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par $\mathbb{A}$ sont alors :

$$\mathbf{C}_{\mathcal{S}}^{p}(x) = x + \sum_{n \geq 2} n\,(2n-1)^{n-2}\,\frac{x^n}{n!}.$$

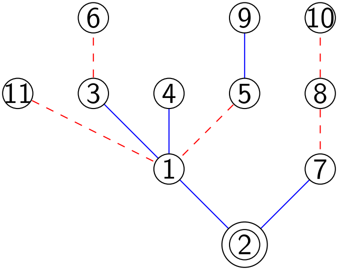
Exemple : Décoration par les arbres enracinés

- Soit $\mathbb{A}$ l'espèce des arbres enracinés. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k arbres est $\binom{n}{k} k \times n^{n-1-k}$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par $\mathbb{A}$ sont alors :

$$\mathbf{C}_{\mathcal{S}}^{p}(x) = x + \sum_{n \geq 2} n(2n-1)^{n-2} \frac{x^n}{n!}.$$

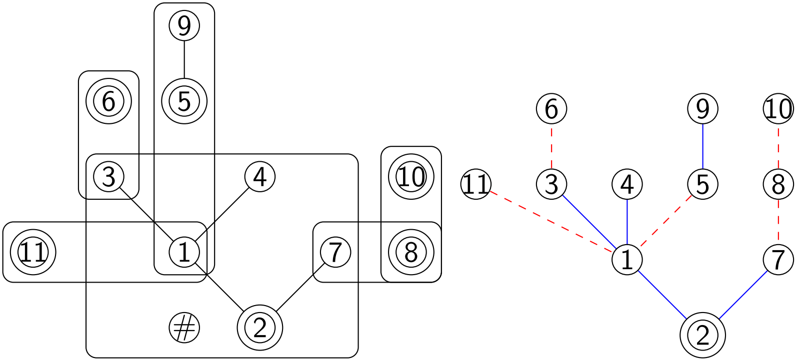
Les hyperarbres décorés par l'espèce des arbres enracinés est en bijection (isomorphisme d'espèce) avec les arbres bicolorés.

Arbres bicolorés



Proposition

L'espèce des hyperarbres creux décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ est isomorphe à l'espèce des arbres enracinés 2-colorés. Le poids de l'hyperarbre est alors égal au nombre d'arêtes rouges.



Proposition

L'ensemble des hyperarbres enracinés décorés par $\widehat{\mathrm{PreLie}}$ *est en bijection avec l'ensemble des arbres enracinés 2-colorés dont la racine a tous ses fils rouges. Le nombre d'arêtes de l'hyperarbre correspond au nombre d'arêtes rouges de l'arbre 2-coloré.*

Merci de votre attention !

[1] B.O. *Action of the symmetric group on the hypertree poset*. Journal of Algebraic Combinatorics, février 2013.

[2] B.O. *Decorated hypertrees*. Journal of Combinatorial Theory A, juillet 2013.