

Hyperarbres et Partitions semi-pointées : Aspects combinatoires, algébriques et homologiques.

Bérénice Delcroix-Oger
Thèse effectuée sous la direction de F. Chapoton

Institut Camille Jordan - Université Lyon 1

Vendredi 21 Novembre 2014

Sommaire

- 1 Des hyperarbres et posets aux posets des hyperarbres

Sommaire

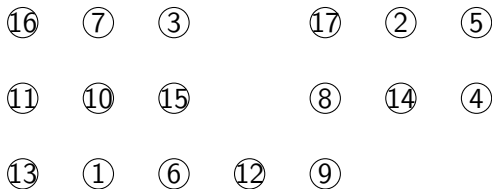
- 1 Des hyperarbres et posets aux posets des hyperarbres
- 2 Hyperarbres et Espèces

Sommaire

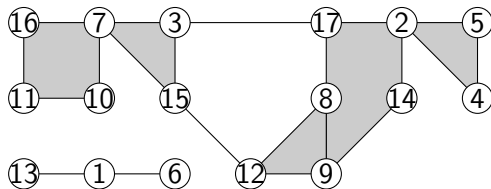
- 1 Des hyperarbres et posets aux posets des hyperarbres
- 2 Hyperarbres et Espèces
- 3 Partitions semi-pointées

- 1 Des hyperarbres et posets aux posets des hyperarbres
 - Hypergraphes et hyperarbres
 - Le poset des hyperarbres
 - Homologie et nombre de Möbius
- 2 Hyperarbres et Espèces
- 3 Partitions semi-pointées

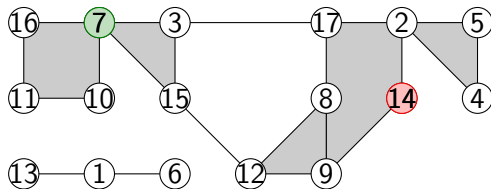
Hypergraphes et hyperarbres



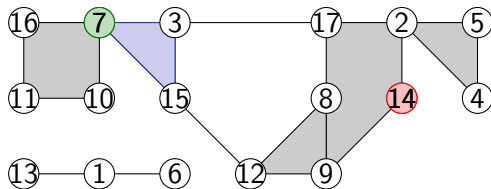
Hypergraphes et hyperarbres



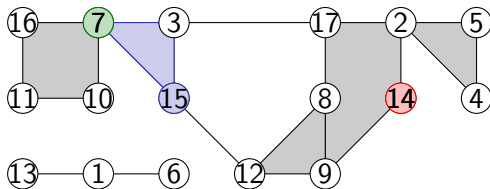
Hypergraphes et hyperarbres



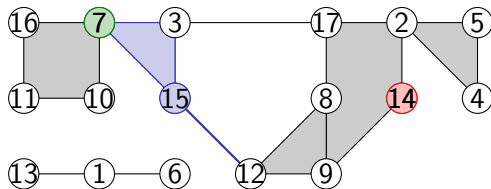
Hypergraphes et hyperarbres



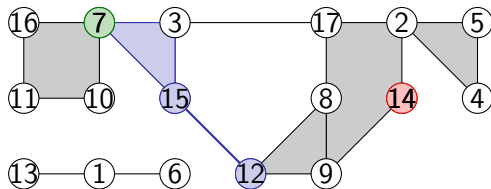
Hypergraphes et hyperarbres



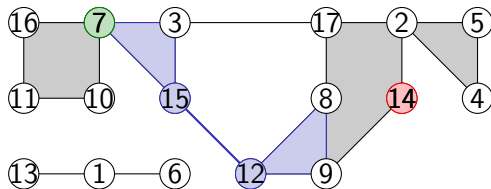
Hypergraphes et hyperarbres



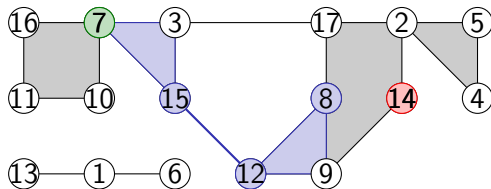
Hypergraphes et hyperarbres



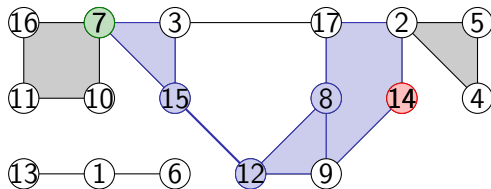
Hypergraphes et hyperarbres



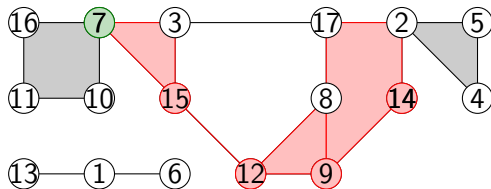
Hypergraphes et hyperarbres



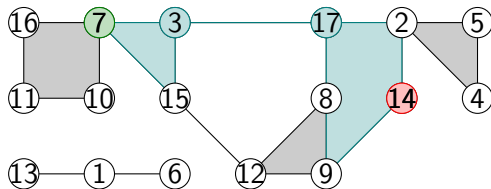
Hypergraphes et hyperarbres



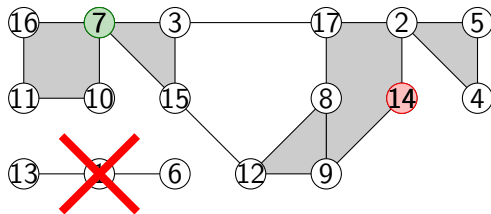
Hypergraphes et hyperarbres



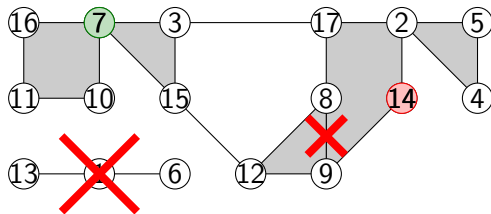
Hypergraphes et hyperarbres



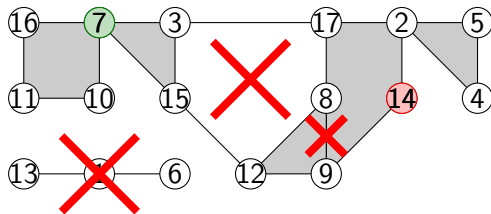
Hypergraphes et hyperarbres

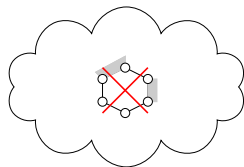
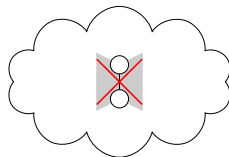
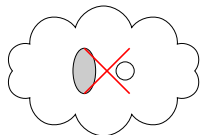


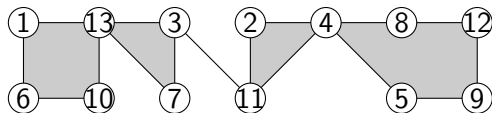
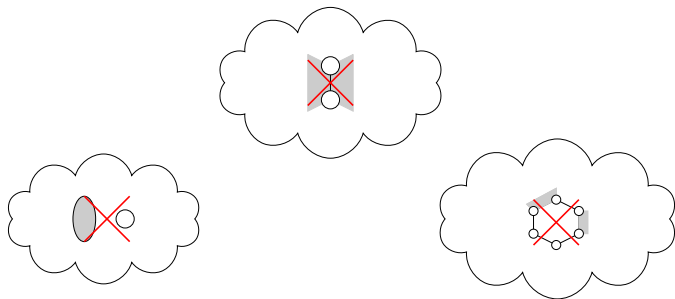
Hypergraphes et hyperarbres



Hypergraphes et hyperarbres







Le poset des hyperarbres

Le poset des hyperarbres

Définition

Soit I un ensemble fini de cardinal n , S et T deux hyperarbres sur I .

$S \preceq T \iff$ Toute arête de S est l'*union d'arêtes* de T .

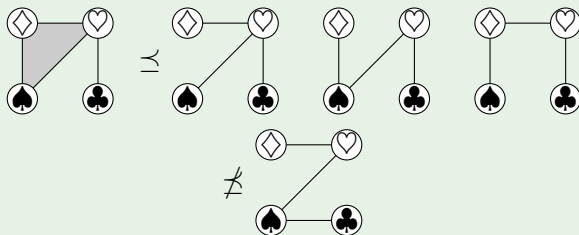
Le poset des hyperarbres

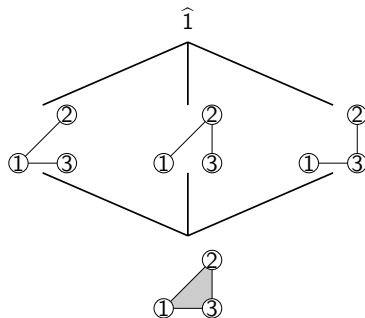
Définition

Soit I un ensemble fini de cardinal n , S et T deux hyperarbres sur I .

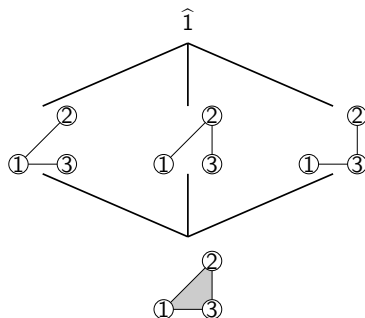
$S \preceq T \iff$ Toute arête de S est l'union d'arêtes de T .

Exemple pour les hyperarbres sur quatre sommets



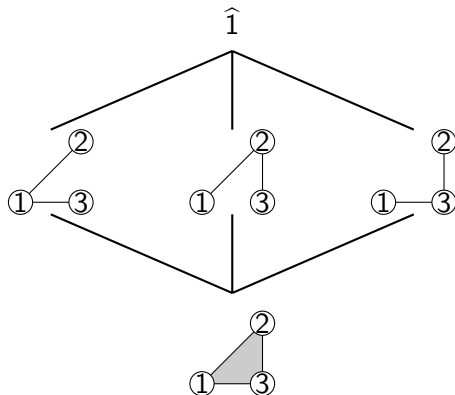


- $\widehat{\text{HT}}_n = \text{poset augmenté des hyperarbres sur } [1, n].$



- $\widehat{HT}_n =$ poset augmenté des hyperarbres sur $[1, n]$.
- Étudié par D. McCullough et A. Miller (1996), N. Brady, J. McCammond, J. Meier et A. Miller (2001), puis C. Jensen, J. McCammond et J. Meier (2004, 2006 et 2007) pour l'étude de groupes d'automorphismes du groupe libre et de produits libres, et F. Chapoton (2007).

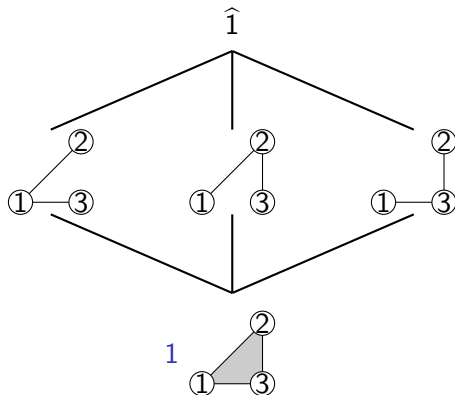
Nombre de Möbius du poset des hyperarbres



$$\mu(\hat{0}, \hat{0}) = 1,$$

$$\mu(\hat{0}, y) = - \sum_{\hat{0} \leq z < y} \mu(\hat{0}, z), \quad \forall y \in P.$$

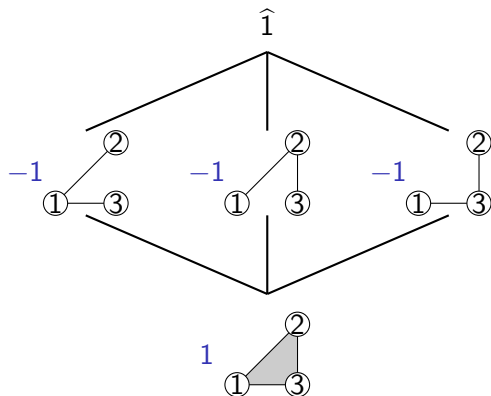
Nombre de Möbius du poset des hyperarbres



$$\mu(\hat{0}, \hat{0}) = 1,$$

$$\mu(\hat{0}, y) = - \sum_{\hat{0} \leq z < y} \mu(\hat{0}, z), \quad \forall y \in P.$$

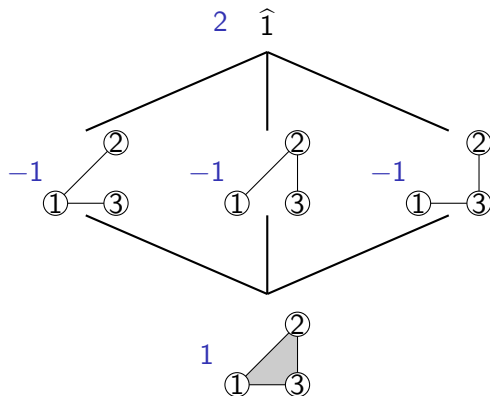
Nombre de Möbius du poset des hyperarbres



$$\mu(\hat{0}, \hat{0}) = 1,$$

$$\mu(\hat{0}, y) = - \sum_{\hat{0} \leq z < y} \mu(\hat{0}, z), \quad \forall y \in P.$$

Nombre de Möbius du poset des hyperarbres

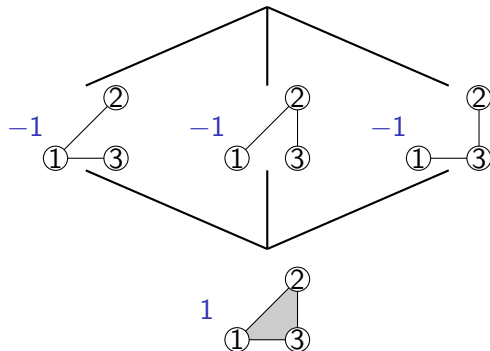


$$\mu(\hat{0}, \hat{0}) = 1,$$

$$\mu(\hat{0}, y) = - \sum_{\hat{0} \leq z < y} \mu(\hat{0}, z), \quad \forall y \in P.$$

Nombre de Möbius du poset des hyperarbres

Nombre de Möbius $\rightarrow 2$ $\hat{1}$



$$\mu(\hat{0}, \hat{0}) = 1,$$

$$\mu(\hat{0}, y) = - \sum_{\hat{0} \leq z < y} \mu(\hat{0}, z), \quad \forall y \in P.$$

Homologie d'un poset

Pour tout poset P et tout entier naturel j ,

$$C_j(P) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\{a_0 < \dots < a_j, a_i \in P \forall i \in \llbracket 0; j \rrbracket\}).$$

Homologie d'un poset

Pour tout poset P et tout entier naturel j ,

$$C_j(P) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\{a_0 < \dots < a_j, a_i \in P \forall i \in \llbracket 0; j \rrbracket\}).$$

On définit l'application de bord $\partial_j : C_j(P) \rightarrow C_{j-1}(P)$ par :

$$\partial(x_0 < x_1 < \dots < x_j) = \sum_{i=0}^j (-1)^i (x_0 < x_1 < \dots < \hat{x}_i < \dots < x_j).$$

On a $\partial_{j-1}\partial_j = 0$.

Homologie d'un poset

Pour tout poset P et tout entier naturel j ,

$$C_j(P) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\{a_0 < \dots < a_j, a_i \in P \forall i \in \llbracket 0; j \rrbracket\}).$$

On définit l'application de bord $\partial_j : C_j(P) \rightarrow C_{j-1}(P)$ par :

$$\partial(x_0 < x_1 < \dots < x_j) = \sum_{i=0}^j (-1)^i (x_0 < x_1 < \dots < \hat{x}_i < \dots < x_j).$$

On a $\partial_{j-1}\partial_j = 0$.

L'homologie mesure le défaut d'exactitude. Elle est définie par :

$$\tilde{H}_j(P) = \ker \partial_j / \text{im } \partial_{j+1}.$$

Caractère Cohen-Macaulay

Définition

*Un poset est **Cohen-Macaulay** si et seulement si tous ses groupes d'homologie réduite sont nuls, sauf celui en degré maximal.*

Caractère Cohen-Macaulay

Définition

*Un poset est **Cohen-Macaulay** si et seulement si tous ses groupes d'homologie réduite sont nuls, sauf celui en degré maximal.*

Proposition (McCammond et Meier, 2004)

Le poset des hyperarbres sur n sommets est Cohen-Macaulay, pour tout $n \geq 1$.

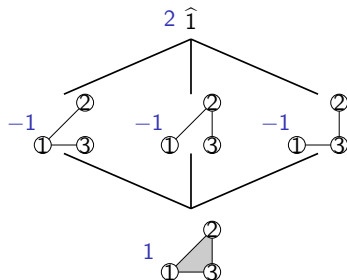
Lien entre le nombre de Möbius d'un poset et son homologie

Nous relierons maintenant ces deux notions :

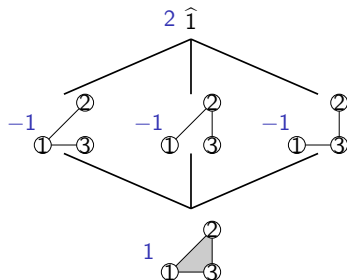
$$\mu(\widehat{HT}_n) = \dim \tilde{H}_{n-3}(\widehat{HT}_n) = (-1)^m \sum_{j \geq -1} (-1)^j \dim C_j(\widehat{HT}_n),$$

où $C_j(\widehat{HT}_n)$ est le \mathbb{C} -espace vectoriel des $j + 1$ -chaînes sur \widehat{HT}_n .

Retour sur le nombre de Möbius du poset des hyperarbres



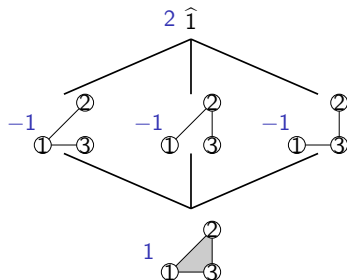
Retour sur le nombre de Möbius du poset des hyperarbres



Nombre de Möbius du poset des hyperarbres sur n sommets

$(n - 1)^{n-2}$ [McCammond et Meier, 2004]

Retour sur le nombre de Möbius du poset des hyperarbres



Nombre de Möbius du poset des hyperarbres sur n sommets

$(n - 1)^{n-2}$ [McCammond et Meier, 2004]



1 Des hyperarbres et posets aux posets des hyperarbres

2 Hyperarbres et Espèces

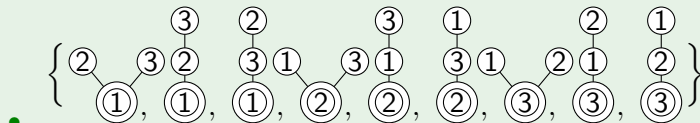
- Espèces
- Des chaînes larges aux chaînes strictes
- Relations entre espèces
- Résultats
- Hyperarbres décorés

3 Partitions semi-pointées

Espèces

Exemples

- $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$
(espèce des listes \mathbb{L})
- $\{\{1, 2, 3\}\}$ (espèce des ensembles \mathbb{E})
- $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ (espèce des ensembles pointés \mathbb{P})



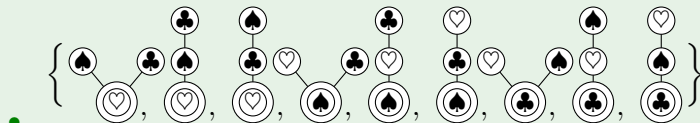
(espèce des arbres enracinés \mathbb{A})

Les ensembles ci-dessus sont des images par des espèces de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Espèces

Exemples

- $\{(\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit), (\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit), (\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit), (\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit), (\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit), (\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit)\}$
(espèce des listes \mathbb{L})
- $\{\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles \mathbb{E})
- $\{\{\heartsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles pointés \mathbb{P})



(espèce des arbres enracinés \mathbb{A})

Les ensembles ci-dessus sont des images par des espèces de l'ensemble $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

Définition formelle

Définition

Une *espèce* F est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. À un ensemble fini I , l'espèce F associe un ensemble fini $F(I)$ indépendant de la nature de I .

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G , deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)

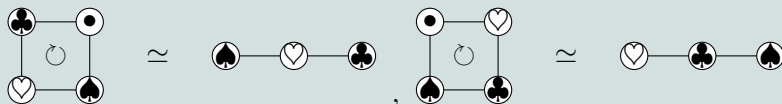
Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G , deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)

Exemple : dérivée de l'espèce des cycles pour $I = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$



Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G , deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F + G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G , deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F + G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \cdot G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)

Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G , deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F + G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \cdot G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $(F \circ G)(I) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I)$ décrit l'ensemble des partitions de I .

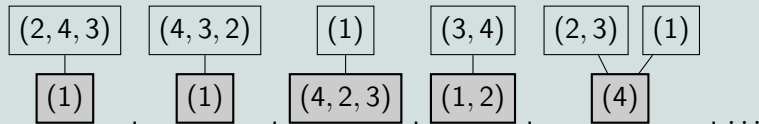
Opérations sur les espèces et séries génératrices

Proposition

Soient F et G , deux espèces.

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F + G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \cdot G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $(F \circ G)(I) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I)$ décrit l'ensemble des partitions de I .

Exemple de substitution : Arbres enracinés de listes sur $I = \{1, 2, 3, 4\}$



Définition

À une espèce F , on associe sa *série génératrice* :

$$C_F(x) = \sum_{n \geq 0} \#F(\{1, \dots, n\}) \frac{x^n}{n!}.$$

Exemples de séries génératrices :

- La série génératrice de l'espèce des **listes** est $C_{\mathbb{L}} = \frac{1}{1-x}$.
- La série génératrice de l'espèce des **ensembles** est $C_{\mathbb{E}} = \exp(x)$.
- La série génératrice de l'espèce des **ensembles pointés** est $C_{\mathbb{P}} = x \cdot \exp(x)$.
- La série génératrice de l'espèce des **arbres enracinés** est $C_{\mathbb{A}} = \sum_{n \geq 1} n^{n-1} \frac{x^n}{n!}$.

Définition

La *série indicatrice de cycles* d'une espèce F est la série formelle en une infinité de variables $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots)$ définie par :

$$Z_F(\mathbf{p}) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} F^\sigma p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} p_3^{\sigma_3} \dots \right),$$

- avec F^σ , l'ensemble des F -structures fixées par l'action de σ ,
- et σ_i , le nombre de cycles de longueur i dans la décomposition en cycles disjoints de σ .

- La série indicatrice de cycles de l'espèce des **listes** est $Z_{\mathbb{L}} = \frac{1}{1-p_1}$.
- La série indicatrice de cycles de l'espèce des **ensembles** est $Z_{\mathbb{E}} = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k}\right)$.
- La série indicatrice de cycles de l'espèce des **ensembles pointés** est $Z_{\mathbb{P}} = p_1 \cdot \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k}\right)$.

Opérations

Proposition

Soient F et G deux espèces. Leurs séries indicatrices de cycles vérifient :

$$\begin{aligned}Z_{F+G} &= Z_F + Z_G, & Z_{F \cdot G} &= Z_F \times Z_G, \\Z_{F \circ G} &= Z_F \circ Z_G, & Z_{F'} &= \frac{\partial Z_F}{\partial p_1}.\end{aligned}$$

Moralité

Toutes les informations voulues sont contenues dans les espèces :
ensemble sous jacent et action du groupe symétrique.

Retour aux chaînes

Pour un entier $n \geq 3$,

Définition

Une *k-chaîne stricte* d'hyperarbres sur I est un k -uplet (a_1, \dots, a_k) , où les a_i sont des hyperarbres sur I différents du minimum $\hat{0}$ et $a_i \prec a_{i+1}$.

Proposition

Comme \widehat{HT}_n est Cohen-Macaulay, le caractère de l'action du groupe symétrique sur \tilde{H}_{n-3} est donné en fonction des caractères de l'action du groupe symétrique sur C_k par :

$$\chi_{\tilde{H}_{n-3}} = (-1)^{n-3} \sum_{k=-1}^{n-3} (-1)^k \chi_{C_k}.$$

Compter les chaînes strictes à l'aide de chaînes larges

Soit I un ensemble de cardinal n .

Définition

Une *k-chaîne large* d'hyperarbres sur I est un k -uplet (a_1, \dots, a_k) , où les a_i sont des hyperarbres sur I et $a_i \preceq a_{i+1}$.

Compter les chaînes strictes à l'aide de chaînes larges

Soit I un ensemble de cardinal n .

Définition

Une *k-chaîne large* d'hyperarbres sur I est un k -uplet (a_1, \dots, a_k) , où les a_i sont des hyperarbres sur I et $a_i \preceq a_{i+1}$.

Soit $M_{k,s}$ l'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$ de longueur k , contenant s lettres "1". L'espèce $\mathcal{M}_{k,s}$ est définie par :

$$\begin{cases} \emptyset & \mapsto M_{k,s}, \\ V \neq \emptyset & \mapsto \emptyset. \end{cases}$$

Compter les chaînes strictes à l'aide de chaînes larges

Soit I un ensemble de cardinal n .

Définition

Une k -chaîne large d'hyperarbres sur I est un k -uplet (a_1, \dots, a_k) , où les a_i sont des hyperarbres sur I et $a_i \preceq a_{i+1}$.

Soit $M_{k,s}$ l'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$ de longueur k , contenant s lettres "1". L'espèce $\mathcal{M}_{k,s}$ est définie par :

$$\begin{cases} \emptyset & \mapsto M_{k,s}, \\ V \neq \emptyset & \mapsto \emptyset. \end{cases}$$

Proposition

Les espèces \mathcal{H}_k des k -chaînes larges et \mathcal{H}_i^s des i -chaînes strictes sont reliées par :

$$\mathcal{H}_k \cong \sum_{i \geq 0} \mathcal{H}_i^s \cdot \mathcal{M}_{k,i}.$$

Proposition

Les espèces \mathcal{H}_k des k -chaînes larges et \mathcal{HS}_i des i -chaînes strictes sont reliées par :

$$\mathcal{H}_k \cong \sum_{i \geq 0} \mathcal{H}_i^s \cdot \mathcal{M}_{k,i}.$$

Démonstration.

Elimination des répétitions

(a_1, \dots, a_k)

$(a_{i_1}, \dots, a_{i_s})$

$u_j = 0$ si $a_j = a_{j-1}$, 1 sinon

(u_1, \dots, u_k)

en posant $a_0 = \hat{0}$.



La proposition précédente donne, pour tout entier naturel k :

$$\chi_k = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \chi_i^s.$$

La proposition précédente donne, pour tout entier naturel k :

$$\chi_k = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \chi_i^s.$$

χ_k est donc un polynôme $P(k)$ en k qui donne, évalué en -1 , le caractère voulu :

Corollaire

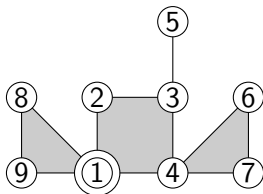
$$\chi_{\tilde{H}_{n-3}} = (-1)^n P(-1) =: (-1)^n \chi_{-1}$$

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, les hyperarbres seront sur $\{1, \dots, n\}$.

Hyperarbres enracinés et creux

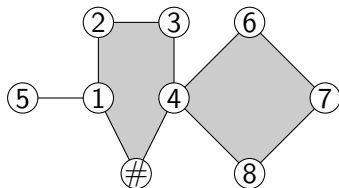
Définition

Soit un hyperarbre H sur I . H est *enraciné* en un sommet s si un sommet s de H est distingué.



Définition

Un hyperarbre *creux* sur n sommets ($n \geq 1$) est un hyperarbre sur l'ensemble $\{\#, 1, \dots, n\}$, tel que le sommet étiqueté par $\#$, appelé le *creux*, appartienne à une et une seule arête.



On note \mathcal{H}_k^{cm} , l'espèce des k -chaînes d'hyperarbres dont le minimum est un hyperarbre creux à une seule arête et \mathcal{H}_k^c , l'espèce des k -chaînes d'hyperarbres dont le minimum est un hyperarbre creux.

Relations entre les espèces d'hyperarbres

Théorème

Les espèces \mathcal{H}_k , \mathcal{H}_k^p , \mathcal{H}_k^c et \mathcal{H}_k^{cm} vérifient :

$$\mathcal{H}_k^p = X \cdot \mathcal{H}'_k$$

$$\mathcal{H}_k^p = X \cdot \mathbb{E} \circ \mathcal{H}_k^c,$$

$$\mathcal{H}_k^c = \mathcal{H}_k^{cm} \circ \mathcal{H}_k^p,$$

$$\mathcal{H}_k^{cm} = \mathbb{E} \circ \mathcal{H}_{k-1}^c - 1.$$

Relations entre les espèces d'hyperarbres

Théorème

Les espèces \mathcal{H}_k , \mathcal{H}_k^p , \mathcal{H}_k^c et \mathcal{H}_k^{cm} vérifient :

$$\mathcal{H}_k^p = X \cdot \mathcal{H}'_k$$

$$\mathcal{H}_k^p = X \cdot \mathbb{E} \circ \mathcal{H}_k^c,$$

$$\mathcal{H}_k^c = \mathcal{H}_k^{cm} \circ \mathcal{H}_k^p,$$

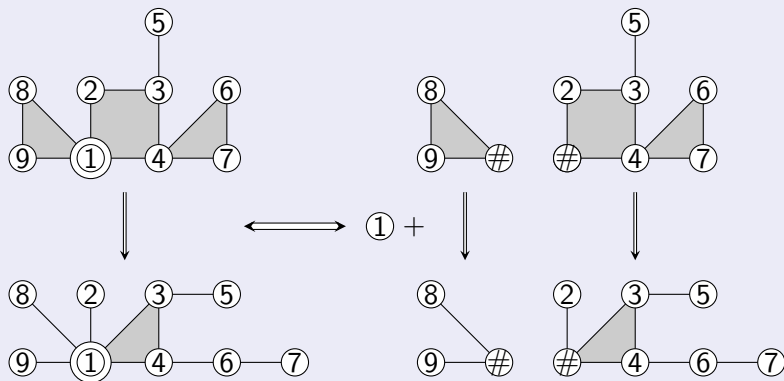
$$\mathcal{H}_k^{cm} = \mathbb{E} \circ \mathcal{H}_{k-1}^c - 1.$$

Démonstration.

- 1 Pointer une espèce revient à faire le produit de l'espèce singleton X et de sa dérivée,
- 2 On sépare la racine et chacune des arêtes la contenant, laissant des creux là où était la racine,

Suite de la démonstration.

$$\mathcal{H}_k^p = X \cdot \mathbb{E} \circ \mathcal{H}_k^c,$$



Dimension de l'homologie

Théorème (McCammond et Meier, 2004)

La dimension du seul groupe d'homologie non trivial du poset des hyperarbres est $(n - 1)^{n-2}$.

Cette dimension est le nombre d'arbres enracinés sur $n - 1$ sommets.

Utilisant les relations sur les espèces établies précédemment :

Proposition

Les séries indicatrices de cycles Z_k et Z_k^p satisfont les relations suivantes :

$$Z_k + Z_{k-1}^p \circ Z_k^p = Z_k^p + Z_{k-1} \circ Z_k^p,$$

$$Z_k^p = p_1 \cdot \mathbb{E} \circ \left(\frac{Z_{k-1}^p \circ Z_k^p - Z_k^p}{Z_k^p} \right),$$

et

$$p_1 \frac{\partial Z_k}{\partial p_1} = Z_k^p.$$

Notons M , la série indicatrice de cycles correspondant à l'action de \mathfrak{S}_n sur les arbres enracinés à $n - 1$ sommets.

Théorème (O., conjecture de Chapoton (2007))

La série indicatrice de cycle Z_{-1} , qui donne le caractère de l'action \mathfrak{S}_n sur \check{H}_{n-3} , est donnée par :

$$Z_{-1} = p_1 - \Sigma M.$$

La série indicatrice de cycles Z_{-1}^P est donnée par :

$$Z_{-1}^P = p_1 (\Sigma \text{PreLie} + 1).$$

Hyperarbres décorés

Définition

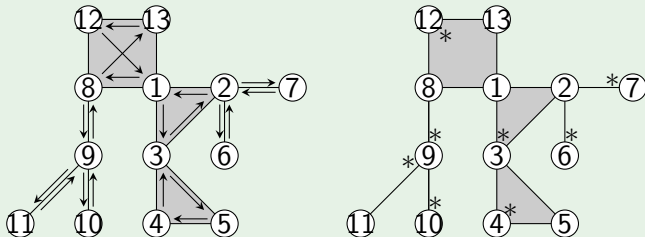
Soit S une espèce, un *hyperarbre décoré* (éventuellement enraciné) est obtenu à partir d'un hyperarbre H (éventuellement enraciné) en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $S(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e .

Hyperarbres décorés

Définition

Soit S une espèce, un *hyperarbre décoré* (éventuellement enraciné) est obtenu à partir d'un hyperarbre H (éventuellement enraciné) en *choisissant* pour chaque arête e de H un *élément* de $S(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e .

Deux décorations différentes du même hyperarbre H :
par l'espèce des *cycles* et par l'espèce des *ensembles pointés*.



Nombres d'hyperarbres décorés

Théorème (O.)

Soit \mathcal{S} une espèce, les séries génératrices des espèces d'hyperarbres décorés et enracinés décorés s'expriment :

$$\mathbf{C}_{\mathcal{S}}^p(x) = x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathcal{S}}(k, n-1) n^k \frac{x^n}{n!},$$

et

$$\mathbf{C}_{\mathcal{S}}(x) = x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathcal{S}}(k, n-1) n^{k-1} \frac{x^n}{n!},$$

où $E_{\mathcal{S}}(k, n)$ est le nombre d'ensembles de k ensembles \mathcal{S}' -décorés sur n sommets.

Ingrédients de la preuve

- Bijection avec des "arbres en boîtes" et des ensembles d'ensembles décorés.
- Eux-mêmes dénombrés par un codage de Prüfer.

Exemple 1 : Décoration par les arbres enracinés

- Soit \mathbb{A} l'espèce des **arbres enracinés**. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k arbres est $\binom{n}{k} k \times n^{n-1-k}$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par \mathbb{A} sont alors :

$$\mathbf{C}_S^P(x) = x + \sum_{n \geq 2} n(2n-1)^{n-2} \frac{x^n}{n!}.$$

Les hyperarbres décorés par l'espèce des arbres enracinés est en bijection (isomorphisme d'espèce) avec les arbres bicolores.

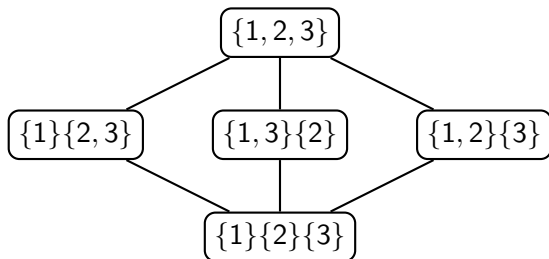
Exemple 2 : Décoration par les ensembles pointés

- Soit \mathbb{P} l'espèce des **ensembles pointés**. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k ensembles pointés est $\binom{n}{k} k^{n-k}$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par \mathbb{P} sont alors :

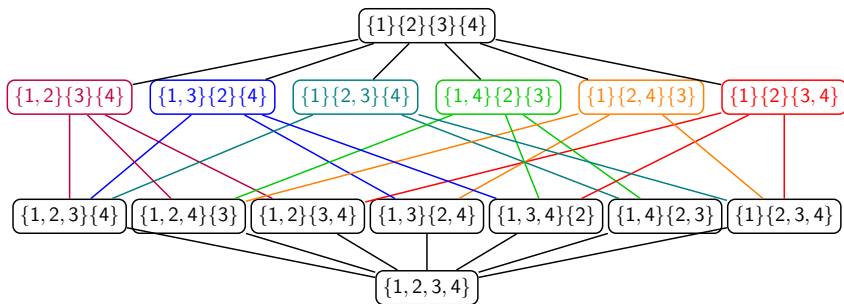
$$\mathbf{C}_S^{\mathbb{P}}(x) = x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} k^{n-1-k} n^k \frac{x^n}{n!}.$$

- 1 Des hyperarbres et posets aux posets des hyperarbres
- 2 Hyperarbres et Espèces
- 3 **Partitions semi-pointées**
 - Partitions semi-pointées
 - Nombre de Möbius
 - Perspectives

Poset des partitions Π_3



Poset des partitions Π_4



Partitions semi-pointées

Définition

Une *partition semi-pointée* est une partition sur un ensemble de "pointables" (●) et un ensemble de "non pointables" (●) vérifiant :

Partitions semi-pointées

Définition

Une *partition semi-pointée* est une partition sur un ensemble de "pointables" (●) et un ensemble de "non pointables" (●) vérifiant :

$$\{\bullet \bullet \bullet\} \rightarrow \blacksquare$$

$$\{\bullet \bullet \bullet\} \rightarrow \blacksquare \text{ ou } \blacksquare$$

$$\{\bullet \bullet\} \rightarrow \blacksquare$$

Partitions semi-pointées

1, 2, 3



{ $\dot{1}$, 2, 3}

{1, $\dot{2}$, 3}

{1, 2, $\dot{3}$ }

1, 2, 3, 4



{ $\dot{1}$, 2, 3, 4}

{1, $\dot{2}$, 3, 4}

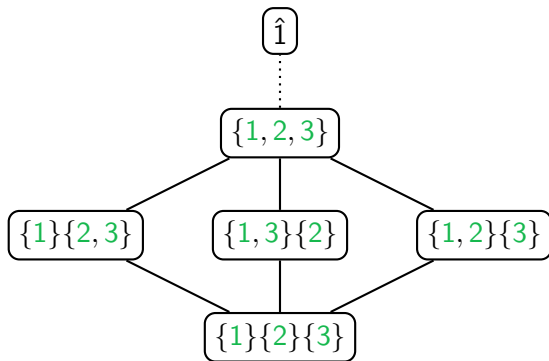
{1, 2, 3, $\dot{4}$ }

1, 2

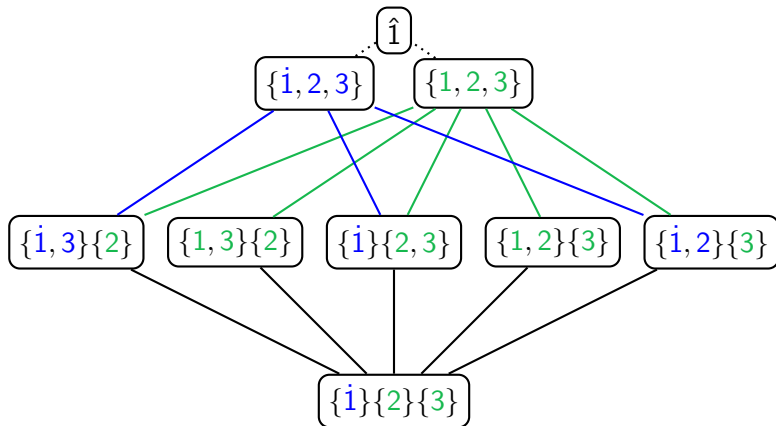


{ $\dot{1}$, $\dot{2}$ }

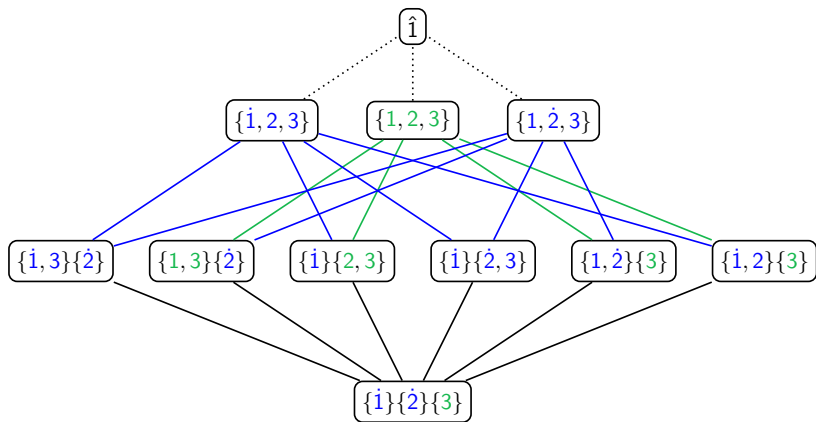
Poset des partitions semi-pointées $\Pi_3 = \Pi_{3,0}$



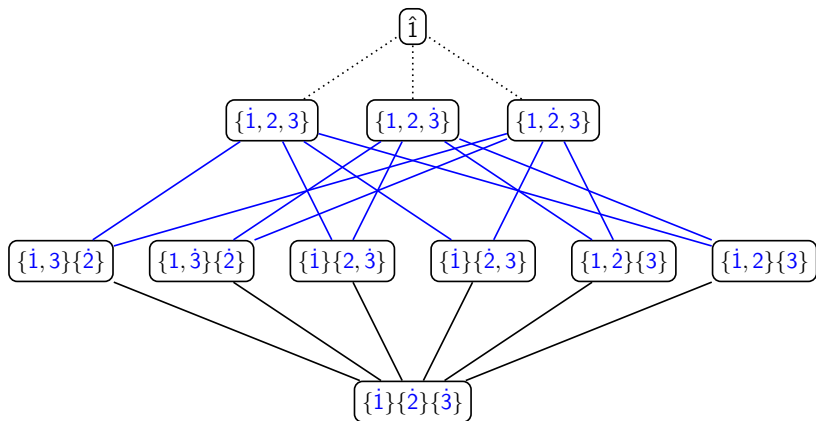
Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,1}$



Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,2}$



Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,3}$



Partitions non pointées, pointées et semi-pointées

Série génératrice des partitions semi-pointées :

$$\exp((x+1)e^{x+y} - e^x) - 1$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	5	15	52
1	1	3	8	25	89	354
2	3	10	35	133	552	2493
3	10	41	173	768	3637	
4	41	196	953	4815		
5	196	1057	5785			
6	1057	6322				
7	6322					

Partitions non pointées, pointées et semi-pointées

Série génératrice des partitions semi-pointées :

$$\exp((x+1)e^{x+y} - e^x) - 1$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	5	15	52
1	1	3	8	25	89	354
2	3	10	35	133	552	2493
3	10	41	173	768	3637	
4	41	196	953	4815		
5	196	1057	5785			
6	1057	6322				
7	6322					

→ Nombres de Bell

Partitions non pointées, pointées et semi-pointées

Série génératrice des partitions semi-pointées :

$$\exp((x+1)e^{x+y} - e^x) - 1$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	5	15	52
1	1	3	8	25	89	354
2	3	10	35	133	552	2493
3	10	41	173	768	3637	
4	41	196	953	4815		
5	196	1057	5785			
6	1057	6322				
7	6322					

→ Nombres de Bell

Les partitions semi-pointées sont des interpolations entre les partitions et les partitions pointées.

Homologie du poset des partitions semi-pointées

Proposition

*Le poset des partitions semi-pointées est **Cohen-Macaulay** (par semi-modularité totale).*

Homologie du poset des partitions semi-pointées

Proposition

Le poset des partitions semi-pointées est *Cohen-Macaulay* (par semi-modularité totale).

Le nombre de Moebius du poset des partitions semi-pointées (avec ℓ et p) est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell + p - 1)!}{(\ell - 1)!} (\ell + p - 1)^{\ell-1}, \ell \geq 1.$$

Homologie du poset des partitions semi-pointées

Proposition

Le poset des partitions semi-pointées est *Cohen-Macaulay* (par semi-modularité totale).

Le nombre de Moebius du poset des partitions semi-pointées (avec ℓ et p) est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell + p - 1)!}{(\ell - 1)!} (\ell + p - 1)^{\ell-1}, \ell \geq 1.$$

La somme des nombres de Möbius des intervalles maximaux du même poset est donné par :

Homologie du poset des partitions semi-pointées

Proposition

Le poset des partitions semi-pointées est *Cohen-Macaulay* (par semi-modularité totale).

Le nombre de Moebius du poset des partitions semi-pointées (avec ℓ et p) est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell + p - 1)!}{(\ell - 1)!} (\ell + p - 1)^{\ell-1}, \ell \geq 1.$$

La somme des nombres de Möbius des intervalles maximaux du même poset est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell + p - 1)!}{\ell!} (\ell + p)^\ell.$$

Homologie du poset des partitions semi-pointées

Proposition

Le poset des partitions semi-pointées est *Cohen-Macaulay* (par semi-modularité totale).

Le nombre de Moebius du poset des partitions semi-pointées (avec ℓ et p) est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell + p - 1)!}{(\ell - 1)!} (\ell + p - 1)^{\ell-1}, \ell \geq 1.$$

La somme des nombres de Möbius des intervalles maximaux du même poset est donné par :

$$(-1)^{p-1} (p - 1)!.$$

Homologie du poset des partitions semi-pointées

Proposition

Le poset des partitions semi-pointées est *Cohen-Macaulay* (par semi-modularité totale).

Le nombre de Moebius du poset des partitions semi-pointées (avec ℓ et p) est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell + p - 1)!}{(\ell - 1)!} (\ell + p - 1)^{\ell-1}, \ell \geq 1.$$

La somme des nombres de Möbius des intervalles maximaux du même poset est donné par :

$$(-1)^{\ell-1} (\ell)^{\ell-1}.$$

Homologie du poset des partitions semi-pointées

Proposition

Le poset des partitions semi-pointées est *Cohen-Macaulay* (par semi-modularité totale).

Le nombre de Moebius du poset des partitions semi-pointées (avec ℓ et p) est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell + p - 1)!}{(\ell - 1)!} (\ell + p - 1)^{\ell-1}, \ell \geq 1.$$

La somme des nombres de Möbius des intervalles maximaux du même poset est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell + p - 1)!}{\ell!} (\ell + p)^\ell.$$

Perspectives

Perspectives

- Analogue en type B du poset des hyperarbres (avec B. Summers)
- Posets d'hyperarbres décorés

Perspectives

- Analogue en type B du poset des hyperarbres (avec B. Summers)
- Posets d'hyperarbres décorés
- Calcul du polynôme caractéristique des partitions semi-pointées

$$\mathbf{c}_{-1,t}^g = \sum_{\ell \geq 1, p \geq 0} \prod_{q=1}^p (t - \ell - q) (t - \ell - p)^{\ell-1} \frac{x^\ell y^p}{\ell! p!}.$$

Calcul de l'algèbre de Hopf d'incidence des partitions semi-pointées

Calcul de l'action du groupe symétrique sur le posets des partitions semi-pointées

- Analogue en type B des partitions semi-pointées

Merci de votre attention !