Proposition de stage
Titre : Treillis de Tamari et arbres de parking

Thématique : Combinatoire algébrique

Laboratoire d'accueil : IMAG, Université de Montpellier, Équipe "Géométrie, Topologie et Algèbre"

Co-encadrants : Bérénice Delcroix-Oger (`berenice.delcroix-oger@umontpellier.fr`) et Matthieu Josuat-Vergès (`josuat@irif.fr`

Le **treillis de Tamari**, introduit par Tamari en 1962, et ses généralisations successives, introduites par Bergeron et Préville-Ratelle en 2012 [2] et Préville-Ratelle et Viennot en 2014 [12, 13], forment un sujet de recherche très actif. Son étude se relie à des sujets de domaines très divers, au confluent de l'algèbre, de la géométrie et de la combinatoire. L'étude du treillis de Tamari se relie ainsi à la géométrie des polytopes, à certaines algèbres classiques ou encore aux cartes planaires. Elle a été motivée notamment dans ces 20 dernières années par le lien entre les intervalles du treillis de Tamari et les coinvariants diagonaux en algèbre. En effet, cette étude initiée par Bergeron, Garsia et Haiman [1] fait, depuis la fin des années 1990, l'objet de recherches actives qui ont menées aux preuves successives des conjectures n ! [11], Shuffle [10, 4] et Delta [9, 7], ainsi qu'à la formulation de problèmes toujours ouverts.
Ce treillis peut être défini sur différents objets énumérés par les nombres de Catalan, tels que les chemins de Dyck ou encore les arbres binaires. Un **chemin de Dyck** de taille n est un chemin du plan de $(0, 0)$ à (n, n), utilisant uniquement des pas de la forme $(1, 0)$ ou $(0, 1)$ et restant au-dessus de la droite $x = y$. Le treillis de Tamari peut être obtenu en munissant l'ensemble des chemins de Dyck de l'ordre défini comme sur la figure 1, où le pas bleu est un pas horizontal précédant un pas vertical et le chemin rouge ne touche la diagonale en pointillé rouge qu'à ses deux extrémités. De même, l'ordre de Tamari se définit aussi sur les arbres binaires plans comme une rotation, comme illustré sur la même figure (avec A, B et C des arbres binaires plans).

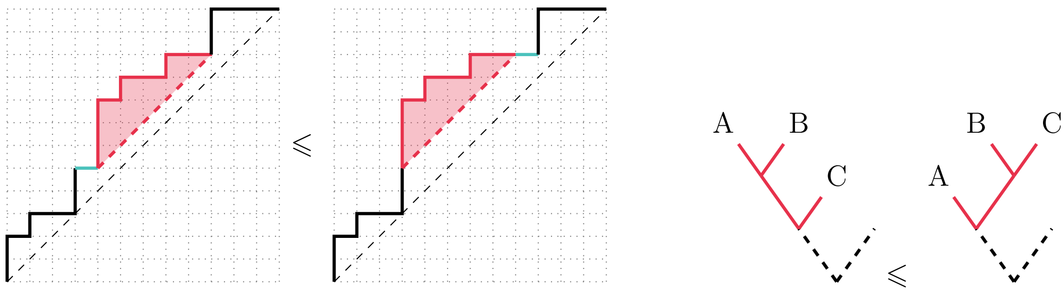

FIGURE 1 – Rotation sur des chemins de Dyck et des arbres binaires

Le poset (ou ensemble partiellement ordonné) obtenu avec cet ordre est représenté figure 2 et **??**.

Le nombre d'intervalles dans le treillis de Tamari joue un rôle clé dans l'étude des coinvariants diagonaux. En 2007, Frédéric Chapoton [5] l'a calculé :

$$\frac{2}{n(n+1)}\binom{4n+1}{n-1}. \tag{1}$$

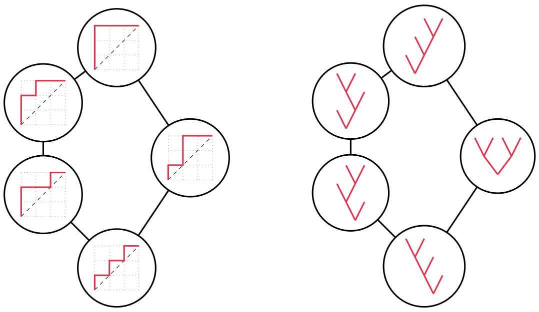

FIGURE 2 – Ordre de Tamari sur les chemins de Dyck et les arbres binaires plans

Ce nombre a été retrouvé de manière combinatoire par Grégory Châtel et Viviane Pons [6].
Une version étiquetée d'une généralisation de ces intervalles a été étudiée par Mireille Bousquet-Mélou, Guillaume Chapuy et Louis-François Préville-Ratelle [3] :

$$(m+1)^n(mn+1)^{n-2} \tag{2}$$

Ces derniers posent dans leur article la question d'un lien combinatoire entre cette formule et les m-fonctions de parking, comptées par la formule suivante [14].

$$(mn+1)^{n-1} \tag{3}$$

Dans un travail récent en collaboration avec Matthieu Josuat-Vergès et Lucas Randazzo, nous avons introduit la notion d'arbres de parking. Un **arbre de parking** sur V est la donnée d'une partition π de V en $|V|$ parts (éventuellement vides) et d'un arbre sur π tel qu'un sommet étiqueté par une part π_j a π_j fils. Nous avons montré que les arbres de parking sont en bijection aves les fonctions de parking et que l'action du groupe symétrique sur les arbres de parking est la même que sur les fonctions de parking.

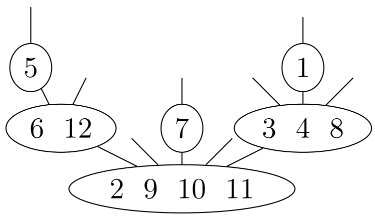

FIGURE 3 – L'arbre de parking correspondant à la fonction de parking 12 1 10 10 3 2 7 10 1 1 1 2.

Enfin, le treillis de Tamari a une interprétation géométrique comme le squelette d'un polytope appelé **associaèdre** représenté à gauche de la figure 4. Ce polytope fait partie d'une famille de polytopes appelée **polytopes d'hypergraphes** ou nestoèdres définis comme des troncations du simplexes (un exemple est représenté sur la partie droite de la figure 4).
Došen et Petrić [8] ont introduits des constructions, analogues aux tubages introduits par Postnikov, qui étiquettent les faces de ces polytopes : ceux-ci forment un point de départ pour une construction analogue aux intervalles-posets.

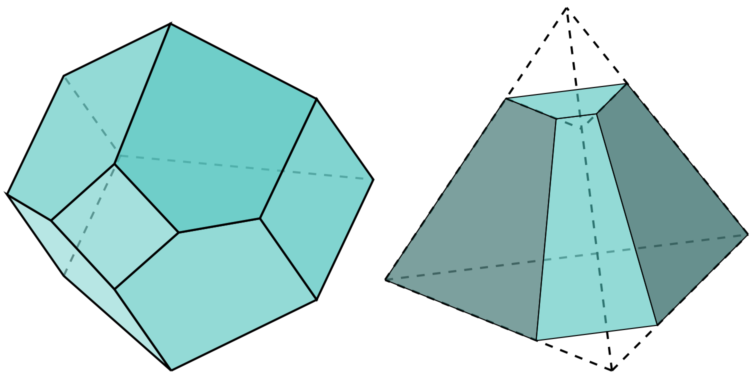

FIGURE 4 – À gauche, un associaèdre. À droite, un exemple de nestoèdre (hypercube).

Objectifs possibles :

- Généraliser les intervalles-posets de Châtel et Pons [6] aux nestoèdres.
- Relier ces travaux aux fonctions de parking, notamment à une version commutative du treillis de Tamari sur les fonctions de parking (via les arbres de parking).
- Donner une interprétation combinatoire de la formule de Bousquet-Mélou, Chapuy et Préville-Ratel.

L'objectif principal du stage sera d'adapter les travaux de Châtel et Pons aux arbres de parking. Le stage pourra ensuite se poursuivre dans différentes directions autour des algèbres de Hopf, des polytopes et de différents posets combinatoires suivant les goûts de l'étudiant.

Références

[1] F. BERGERON et al. « Identities and positivity conjectures for some remarkable operators in the theory of symmetric functions ». In : t. 6. 3. Dedicated to Richard A. Askey on the occasion of his 65th birthday, Part III. 1999, p. 363-420. DOI : `10.4310/MAA.1999.v6.n3.a7`. URL : `https://doi.org/10.4310/MAA.1999.v6.n3.a7`.

[2] François BERGERON et Louis-François PRÉVILLE-RATELLE. « Higher trivariate diagonal harmonics via generalized Tamari posets ». English. In : *J. Comb.* 3.3 (2012), p. 317-341. ISSN : 2156-3527. DOI : `10.4310/JOC.2012.v3.n3.a4`.

[3] Mireille BOUSQUET-MÉLOU, Guillaume CHAPUY et Louis-François PRÉVILLE-RATELLE. « The representation of the symmetric group on m-Tamari intervals ». English. In : *Adv. Math.* 247 (2013), p. 309-342. ISSN : 0001-8708. DOI : `10.1016/j.aim.2013.07.014`.

[4] Erik CARLSSON et Anton MELLIT. « A proof of the shuffle conjecture ». In : *J. Amer. Math. Soc.* 31.3 (2018), p. 661-697. ISSN : 0894-0347. DOI : `10.1090/jams/893`. URL : `https://doi.org/10.1090/jams/893`.

[5] Frédéric CHAPOTON. « Sur le nombre d'intervalles dans les treillis de Tamari ». French. In : *Sémin. Lothar. Comb.* 55 (2005), b55f, 18. ISSN : 1286-4889.

[6] Grégory CHÂTEL et Viviane PONS. « Counting smaller elements in the Tamari and m-Tamari lattices ». English. In : *J. Comb. Theory, Ser. A* 134 (2015), p. 58-97. ISSN : 0097-3165. DOI : `10.1016/j.jcta.2015.03.004`.

[7] Michele D'Adderio et Anton Mellit. « A proof of the compositional delta conjecture ». In : *Adv. Math.* 402 (2022), Paper No. 108342, 17. issn : 0001-8708. doi : `10.1016/j.aim.2022.108342`. url : `https://doi.org/10.1016/j.aim.2022.108342`.

[8] Kosta Došen et Zoran Petrić. « Hypergraph polytopes ». English. In : *Topology Appl.* 158.12 (2011), p. 1405-1444. issn : 0166-8641. doi : `10.1016/j.topol.2011.05.015`.

[9] J. Haglund, J. B. Remmel et A. T. Wilson. « The delta conjecture ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 370.6 (2018), p. 4029-4057. issn : 0002-9947. doi : `10.1090/tran/7096`. url : `https://doi.org/10.1090/tran/7096`.

[10] J. Haglund et al. « A combinatorial formula for the character of the diagonal coinvariants ». In : *Duke Math. J.* 126.2 (2005), p. 195-232. issn : 0012-7094. doi : `10.1215/S0012-7094-04-12621-1`. url : `https://doi.org/10.1215/S0012-7094-04-12621-1`.

[11] Mark Haiman. « Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture ». In : *J. Amer. Math. Soc.* 14.4 (2001), p. 941-1006. issn : 0894-0347. doi : `10.1090/S0894-0347-01-00373-3`. url : `https://doi.org/10.1090/S0894-0347-01-00373-3`.

[12] Louis-François Préville-Ratelle et Xavier Viennot. « An extension of Tamari lattices ». English. In : *Proceedings of the 27th international conference on formal power series and algebraic combinatorics, FPSAC 2015, Daejeon, South Korea, July 6–10, 2015.* Nancy : The Association. Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science (DMTCS), 2015, p. 133-144.

[13] Louis-François Préville-Ratelle et Xavier Viennot. « The enumeration of generalized Tamari intervals ». English. In : *Trans. Am. Math. Soc.* 369.7 (2017), p. 5219-5239. issn : 0002-9947. doi : `10.1090/tran/7004`.

[14] Catherine H. Yan. « Parking functions ». English. In : *Handbook of enumerative combinatorics.* Boca Raton, FL : CRC Press, 2015, p. 835-893. isbn : 978-1-4822-2085-8 ; 978-1-4822-2086-5.