Combinatoire des fonctions de parking
Feuille n° 1 : Espèces et dénombrement

Exercice 1 : Échauffement

Calculer les espèces suivantes :
- espèce des ensembles
- espèce des ensembles pointés
- espèce des cycles
- espèce des arbres binaires plans enracinés
- espèce des arbres plans enracinés
- espèce des arbres de Cayley (arbres enracinés non plans)
- espèce des partitions
- espèce des partitions ordonnées
- espèce des permutations

Exercice 2 : Hyperarbres enracinés

Généralisant la notion de graphe, un *hypergraphe* est formé d'une paire (V, E) où V es l'ensemble des sommets de l'hypergraphe et E est l'ensemble des arêtes. Chaque arête $e \in E$ est formé d'un sous-ensemble d'au moins deux sommets. Un exemple d'hypergraphe est présenté Figure 1.

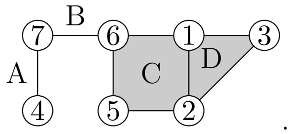

FIGURE 1 – Un hypergraphe sur 7 sommets. Les sommets sont numérotés de 1 à 7 et les arêtes étiquetées de A à D. L'arête C par exemple est l'arête $\{1, 2, 5, 6\}$.

Un *chemin* dans un hypergraphe est une suite $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$ où les v_i sont des sommets de l'hypergraphe et les e_i des arêtes tels que $\{v_{i-1}, v_i\} \in e_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Un *hyperarbre* est un hypergraphe connexe et sans cycle, c'est-à-dire qu'il existe un unique chemin entre toute paire de sommets. Notamment, l'intersection de deux arêtes et de taille au plus un. Pour faciliter le dénombrement, les hypergraphes seront enracinés en un sommet. Le but de cet exercice est de dénombres les hyperarbres de deux manières différentes : par une variante du codage de Prüfer, introduite par R. Bacher, et en utilisant la théorie des espèces.

Dans toute arête, il y a un sommet qui est plus proche de la racine que tous les autres. Ce sommet est appelé (un) *pétiole*. Nous considèrerons l'ensemble E^p des arêtes privées de leur pétiole. Un élément de cet ensemble sera de type *feuille* si aucun de ses sommets n'est le pétiole d'une autre arête.

1. Par analogie avec le codage de Prüfer présenté en cours, décriver un codage de Prüfer pour les hyperarbres enracinés.

2. En déduire le nombre d'hyperarbres enracinés sur n sommets avec k arêtes.

3. L'inconvénient de cette approche précédente est qu'elle ne respecte pas l'action du groupe symétrique : décomposer l'espèce des hyperarbres en opérations d'espèces de manière à obtenir une éuation fonctionnelle

4. En déduire le nombre d'hyperarbres enracinés sur n sommets par calcul de résidus.